· allg. Bilanzgleichg.:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle + \underline{\nabla}_q \cdot \frac{1}{m} \langle \underline{p}\, \chi^\alpha \rangle = \underline{F} \cdot \langle \underline{\nabla}_p \chi^\alpha \rangle} \quad (4.33)$$

(i) Teilchenzahlerhaltg: $\chi^s = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \underline{\nabla}_q \cdot \underline{j} = 0}$$

$$\text{mit } \underline{j} = n\underline{u} = \langle \tfrac{\underline{p}}{m} \rangle \quad (4.34)$$

(ii) Impulserhaltg: $\chi^i = p_i$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \nabla_j \big(\underbrace{m n u_i\, u_j}_{m j_i} - T_{ij} \big) = n F_i$$

$$\underbrace{m n u_i u_j}\ \dots \text{konvekt. Anteil} = \text{Impulsdichte} \times \text{Geschw.} \quad (4.35)$$

$$T_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle \quad \dots \text{Spannungstensor}$$

$$n F_i \dots \text{Volumen-kraftdichte äußerer Kräfte}$$

$$\xrightarrow{\text{mit } (4.34)} \boxed{\underbrace{m n}_{\substack{\text{Massen-}\\\text{dichte}}} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q \Big) u_i = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\substack{\text{Oberflächen-}\\\text{kräfte}}} + n F_i} \quad (4.36)$$

(iii) Energieerhaltg: $\chi^s = \frac{p^2}{2m}$

$$(1)\quad \frac{1}{m} \langle p_i \chi^s \rangle = \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle \qquad \overbrace{u_j^2 + 2 u_j c_j + c_j^2}$$

$$= u_i \langle \tfrac{p^2}{2m} \rangle + \frac{1}{2} m \langle c_i \overbrace{(u_j + c_j)^2} \rangle$$

$$\overset{(4.32)}{=} n u_i \Big(\frac{m}{2} u^2 + e \Big) + \underbrace{m u_j \langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$$
$$\underset{\langle c_i \rangle}{}$$

$$(2)\quad \langle \nabla_p \tfrac{p^2}{2m} \rangle = \langle \tfrac{p}{m} \rangle = \underline{j} \qquad\qquad (4.37)$$
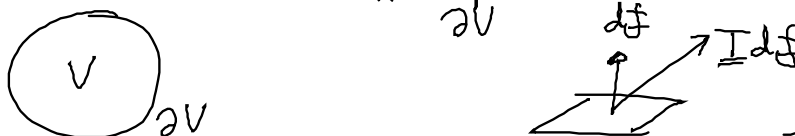
$$\xrightarrow[\text{in } (4.33)]{\text{mit } (1),(2)} \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \Big[n\Big(\frac{m}{2} u^2 + e \Big) \Big] + \nabla_i \Big[n u_i \Big(\frac{m}{2} u^2 + e \Big) - T_{ij} u_j + q_i \Big] = \underline{j} \cdot \underline{F}}$$

$$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\substack{\text{Energiestromdichte}\\ \underbrace{}_{\substack{\text{konvektiver}\\ \text{Anteil}}}\ \underbrace{}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Kräfte}}}\ \underbrace{}_{\substack{\text{Wärme}\\ \text{strom}}}}}\quad \underbrace{}_{\substack{\text{Leistungs-}\\ \text{dichte der}\\ \text{äußeren}\\ \text{Kräfte}}}$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}$ .... Wärmestromdichte

$$\int_{4.36} dV \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \underbrace{mj_i}_{mnu} = -\int_{\partial V} mn u_i \, df_i + \int_{\partial V} T_{ij} \, df_i$$

Beachte: Oberfläche Kraft

V ∂V

kind Fluß durch ∂V

df $\underline{\underline{I}} \, df$

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36)

$\longrightarrow \boxed{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right) e = -\underline{\nabla}\cdot\underline{q} + T_{ij}\nabla_i u_j}$ (4.38)

$\underbrace{}$ zeitliche Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol.-element

$\underbrace{}$ Wärmefluß

$\underbrace{}$ mechan. Leistung der inneren Kräfte

$\left[dU = \bar{d}Q + \bar{d}W \right]$

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

• Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{\underline{I}}$ und Wärmestromdichte $\underline{q}$
$\equiv$ explizite Beziehung mit $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$

Annahme: Lokales GG

$$f_0(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\underline{p} - m\underline{u})^2}{2m k_B T}\right] \quad (4.29)$$

$\underbrace{\underline{c} = \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}}$ $\rightarrow \left[-\frac{\underline{c}^2}{2 k_B T/m}\right]$

mit $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(\underline{q}, t)$

Bemerkung: $\dfrac{df_0}{dt}\Big|_{Stoß} = 0$, aber $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p\right) f_0 \neq 0$

· Berechng der Mittelwerte

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 = n \dfrac{k_B T}{m}\, \delta_{ij}}$$

Mittelwerte
mit f_0

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{ij}^0 = -m\langle c_i c_j \rangle_0 = -P\, \delta_{ij} \\[4pt] \text{mit } P = n\, k_B T \ \ldots \text{Druck} \\[4pt] \qquad \ldots \text{ideale Gasgleichg} \\[10pt] q_i^0 = \langle c_i \dfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0 \\[10pt] n e = \dfrac{m}{2}\langle \underline{c}^2 \rangle_0 = \dfrac{3}{2} n\, k_B T \end{array}}$$ (4.40)

$\implies$ explizite Erhaltungssätze: $\boxed{\underbrace{\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q}}$ (4.41)

(4.34) $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n\underline{u}) \\[8pt] mn\dfrac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n\underline{F} \ , \quad P = n k_B T \\[8pt] \dfrac{d}{dt} T = -\dfrac{2}{3} T\, \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} \end{array}}$

(4.36) $\xrightarrow{\ \nabla_i T_{ij} = -\nabla_i P\ }$ (4.43)

(4.38) $\xrightarrow{\ T_{ij} \nabla_q u_j = -P\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}\ }$ (4.44)

(4.42)

$\left[n\dfrac{d}{dt} e = -\underline{\nabla}_q + T_{ij}\, u_{ij} \right]$

· Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)

$\longrightarrow$ enthalten keine Dissipation

$\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null

(2) Verdeutlichg:

(4.42) $\longrightarrow$ $\dfrac{d}{dt} n = -n\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} \longrightarrow \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} = -\dfrac{1}{n}\dfrac{d}{dt} n = -\dfrac{d}{dt} \ln n$

in (4.44) $\longrightarrow$ $\dfrac{d}{dt} T = \dfrac{2}{3} T \dfrac{d}{dt}\ln n \longrightarrow \dfrac{3}{2}\dfrac{d}{dt}\ln T = \dfrac{d}{dt}\ln n$

$\longrightarrow$ $\dfrac{d}{dt}\underbrace{\ln\left(n\, T^{-3/2}\right)} = 0$

$\sim$ lokale Entropie des Gases (o.B.),
die d.t sich nicht

(3) (4.43) = Eulersche Gl.

Schallbbz um Strömunge kompressibler Gase

· Modenanalyse von (4.42)-(4.43): s. Übunge

(i) Setze: $n = \bar{n} + \delta n (\underline{q},t)$

$T = \bar{T} + \delta T(\underline{q},t)$

$\underline{u} = \underset{\uparrow}{0} + \underline{u}(\underline{q},t)$

homogene   kleine
GG-Zustand   Abweichung

(ii) linearisiere (4.42)-(4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

(iii) löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k},\omega) \\ \delta T(\underline{k},\omega) \\ \underline{u}(\underline{k},\omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i \underline{k}\cdot\underline{q}}$$

$\longrightarrow$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

(iv) Ergebnisse: 2 Schallwellen: $\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$

mit $c_s = \sqrt{\dfrac{5}{3}\dfrac{k_B \bar{T}}{m}}$ ... Schallgeschw.

keine Dämpfung

2 statische Scher-moden: $\omega_{1/2} = 0$

(*)

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$
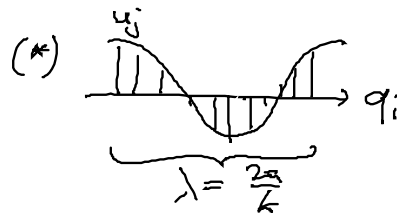
stat. Geschw.profil
$\rightarrow$ Gas kann
aneinander vorbei-
scheren, weil
keine Dissipation

1 statische Temp./Dichte-mode: $\omega_3 = 0$

$\underline{\nabla}\, \delta T + \dfrac{\bar{T}}{\bar{n}} \underline{\nabla}\, \delta n = 0 !$