· allg. Bilanzgleichung:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\langle \chi^\alpha\rangle + \underline{\nabla}_q\cdot\frac{1}{m}\langle \underline{p}\,\chi^\alpha\rangle = \underline{F}\cdot\langle \underline{\nabla}_p\, \chi^\alpha\rangle} \qquad (4.33)$$

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \underline{\nabla}_q \cdot \underline{j} = 0 \qquad \text{mit } \underline{j} = n\underline{u} = \left\langle \frac{\underline{p}}{m}\right\rangle} \qquad (4.34)$$

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i$

$$m\frac{\partial}{\partial t} j_i + \nabla_j \underbrace{(\underbrace{m n u_i}_{m j_i}\, u_j - T_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i$$

$m n u_i u_j$ ... konvekt. Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ ... Spannungstensor

$n F_i$ ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte (4.35)

$$\xrightarrow{\text{mit (4.34)}} \boxed{\underbrace{mn}_{\text{Massendichte}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q\right) u_i = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte}} + n F_i} \qquad (4.36)$$

(iii) Energieerhaltung: $\chi^5 = \frac{\underline{p}^2}{2m}$

(1) $$\frac{1}{m}\langle p_i \chi^5\rangle = \left\langle (u_i + c_i)\frac{\underline{p}^2}{2m}\right\rangle$$

$$= u_i\left\langle \frac{\underline{p}^2}{2m}\right\rangle + \frac{1}{2} m \left\langle c_i \overbrace{(u_j + c_j)^2}^{u_j^2 + 2u_jc_j + c_j^2}\right\rangle$$

$$\underset{\langle c_i\rangle}{\overset{(4.32)}{=}} n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right) + \underbrace{m u_j\langle c_i c_j\rangle}_{-u_j T_{ij}} + \left\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2\right\rangle$$

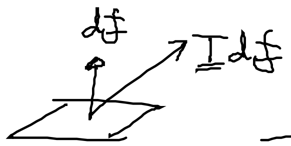
(2) $$\left\langle \underline{\nabla}_p \frac{\underline{p}^2}{2m}\right\rangle = \left\langle \frac{\underline{p}}{m}\right\rangle = \underline{j}$$

$$\xrightarrow[\text{in (4.33)}]{\text{mit (1), (2)}} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)\right] + \nabla_i \underbrace{\left[\underbrace{n u_i\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}} \underbrace{- T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}}\right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \underbrace{\underline{j}\cdot\underline{F}}_{\text{Leistungsdichte der äußeren Kräfte}}} \qquad (4.37)$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}$ .... Wärmestromdichte

[Bedeutung: Oberflächenkraft

$\int$ 4.36 dV $\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_V \underbrace{m j_i}_{mn\underline{u}} = -\underbrace{\int_{\partial V} mnu_i\, df_i}_{\text{Impulsfluß durch } \partial V} + \int_{\partial V} T_{ij}\, df_i$



]

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36)

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)e}_{\substack{\text{zeitliche Änderung} \\ \text{der inneren Energie} \\ \text{für bewegtes Vol.element}}} = -\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{q}}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij}\nabla_i u_j}_{\substack{\text{mechan. Leistung} \\ \text{der inneren Kräfte}}}} \quad (4.38)$$

$[dU = đQ + đW]$

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{T}$ und Wärmestromdichte $\underline{q}$
  $\equiv$ explizite Berechnung mit $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$

Annahme: Lokales GG

$$f_0(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\Big[-\underbrace{\frac{(\underline{p} - m\underline{u})^2}{2 m k_B T}}\Big] \quad (4.29)$$

$$\xrightarrow{\underline{c} = \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}} \left[-\frac{\underline{c}^2}{2k_BT/m}\right]$$

mit $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(\underline{q}, t)$

Bemerkung: $\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right) f_0 \neq 0$

- Berechnung der Mittelwerte

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 = n\frac{k_B T}{m}\delta_{ij}}$$

Mittelwerte mit f_0

$$\boxed{\begin{aligned} &T_{ij}^0 = -m\langle c_i c_j\rangle_0 = -P\delta_{ij} \\ &\quad \text{mit } P = n k_B T \text{ ... Druck} \\ &\quad \text{.... ideale Gasgleichung} \\ &q_i^0 = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0 \\ &ne = \tfrac{m}{2}\langle \underline{c}^2\rangle_0 = \tfrac{3}{2} n k_B T \end{aligned}} \quad (4.40)$$

$\Longrightarrow$ explizite Erhaltungssätze: $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q}$ (4.41)

$$\boxed{\begin{aligned}
&(4.34) \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q\cdot(n\underline{u}) && (4.42)\\
&(4.36) \xrightarrow{\nabla_j T_{ij} = -\nabla_i P} \quad mn\frac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n\underline{F}, \quad P = n k_B T && (4.43)\\
&(4.38) \xrightarrow{T_{ij}\nabla_j u_i = -P\underline{\nabla}_q\cdot\underline{u}} \quad \frac{d}{dt}T = -\frac{2}{3}T\,\underline{\nabla}_q\cdot\underline{u} && (4.44)
\end{aligned}}$$

$\left[n\frac{d}{dt}e = -\underline{\nabla}\cdot\underline{q} + T_{ij}u_{ij}\right]$

- Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)

$\longrightarrow$ enthalten <u>keine</u> Dissipation

$\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren <u>nicht</u> gegen Null

(2) Verdeutlichung:

(4.42) $\longrightarrow \frac{d}{dt}n = -n\underline{\nabla}_q\cdot\underline{u} \longrightarrow \underline{\nabla}_q\cdot\underline{u} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dt}n = -\frac{d}{dt}\ln n$

in (4.44) $\longrightarrow \frac{d}{dt}T = \frac{2}{3}T\frac{d}{dt}\ln n \longrightarrow \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\ln T = \frac{d}{dt}\ln n$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\ln\left(nT^{-3/2}\right)}_{\sim \text{ lokale Entropie des Gases (o.B.)}} = 0$$

ändert sich nicht

(3) (4.43) ≡ Eulersche Gl.

Behandlung von Strömungen kompressibler Gase

- Modenanalyse von (4.42)–(4.44): s. Übungen

(i) Setze:
$$n = \bar{n} + \delta n(\underline{q}, t)$$
$$T = \bar{T} + \delta T(\underline{q}, t)$$
$$\underline{u} = 0 + \underbrace{\underline{u}(\underline{q}, t)}$$

homogener GG-Zustand   kleine Abweichung

(ii) linearisiere (4.42)–(4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

(iii) löse durch Modenansatz:
$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(\underline{k}, \omega) \\ \delta T(\underline{k}, \omega) \\ \underline{u}(\underline{k}, \omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\underline{k}\cdot\underline{q}}$$

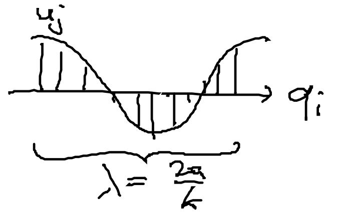
$\longrightarrow$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

(iv) Ergebnisse: 2 Schallwellen: $\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B T}{m}}$ ... Schallgeschw.

keine Dämpfung

2 statische Schermoden: $\omega_{1/2} = 0$

(*) 

stat. Geschw.profil
$\rightarrow$ Gas kann aneinander vorbeischeren weil keine Dissipation

1 statische Temp./Dichtemode: $\omega_3 = 0$
$$\underline{\nabla}\delta T + \frac{\bar{T}}{\bar{n}}\underline{\nabla}\delta n = 0!$$