4.3 Die Boltzmann-Gleichung

• $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\, p\cdot\nabla_q + F\cdot\nabla_p\right) f(q,p,t) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}$ (4.17)

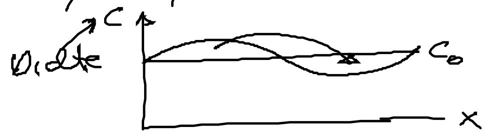
mit $\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\; K(p,p_2;p_3,p_4)\,[f_3 f_4 - f f_2]$

• Lokale Maxwell-Verteilung:

$$f(q,p,t) = n(q,t)\,\frac{1}{[2\pi m k_B T(q,t)]^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{(p-mu(q,t))^2}{2m k_B T(q,t)}\right] \quad (4.28)$$

4.4 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

$\longrightarrow$ hydrodynamische Variable $\leftrightarrow$ Erhaltungsgrößen



} Dynamik auf langen Zeitskalen

• Weg ins Gleichgewicht:

(i) auf Zeitskala der Stöße τ_c

$$f_2(\ldots) = f_1(\ldots)\, f_1(\ldots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \text{Reichweite Ww-Potentiale}$$

(ii) auf mittlerer stoßfreier Zeit $\tau \gg \tau_c$

Stoßinvarianten gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ lokales GG

mit $n(q,t)$, $T(q,t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A(q,t)\rangle = \int d^3p\; \underbrace{f(q,p,t)}_{\substack{\text{lokale Max-}\\ \text{wellverteilung}\\ (4.28)}}\, A(q,p,t)$$

bestimmt durch Stoßterm $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\text{Stoß}}$ in (4.17)

(iii) Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$:
bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)
$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen = hydrodynamische Variable

4.4.1 Erhaltungssätze

- Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgrößen (am Ort q) (4.32)

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $n(q,t) \equiv \int d^3p \; 1 \; f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte = $m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t) \underbrace{u_i(q,t)}_{\substack{\text{mittlere} \\ \text{Teilchengeschw.}}} = \int d^3p \; \frac{p_i}{m} f = \left\langle \frac{p_i}{m} \right\rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte

$$n(q,t)\Bigg[\underbrace{\frac{m u^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinet. Energie} \\ \text{der lokalen} \\ \text{konvektiven} \\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere Energie} \\ \text{pro Teilchen} \\ = \text{mittlere kinetische} \\ \text{Energie im lokalen} \\ \text{Ruhesystem}}}\Bigg] = \int d^3p \; \frac{p^2}{2m} f = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$$

mit $n \underline{u} = \left\langle \frac{\underline{p}}{m} \right\rangle$

und $n e = \frac{m}{2} \int d^3p \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 f = \left\langle \frac{m}{2} \underbrace{\left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2}_{\underline{c}} \right\rangle$

(Beweis: $\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{m}{2} \left\langle \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} + \underline{u}\right)^2 \right\rangle$

$$= \underset{\langle 1 \rangle}{n} \frac{m}{2} u^2 + \underbrace{\frac{m}{2} \left\langle \left(\frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}\right)^2 \right\rangle}_{ne\,!} + 2 \frac{m}{2} \underline{u} \underbrace{\left\langle \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u} \right\rangle}_{=0}$$
)

(ged.)

- Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen:

allgemein: $\int d^3p$ Boltzmann Gl. (4.17) $\times \chi^\alpha$

$$\ln \cancel{\frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}} = \cancel{\ln f_1 + f_2 - (\ln f_3 + \ln f_4)} = \cancel{\chi_1^\alpha + \chi_2^\alpha - (\chi_3^\alpha + \chi_4^\alpha)}$$

[NB: $\int d^3p \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha \stackrel{\uparrow}{=} 0$

Argumentation wie bei H-Theorem mit $1+\ln f \to \chi^\alpha$ & Erhaltung]

$$\longrightarrow \int d^3p\, \chi^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] f(\underline{q},\underline{p},t) = 0$$

$$= \underline{F}\cdot[\underbrace{\underline{\nabla}_p(\chi^\alpha f)}_{\hookrightarrow \text{ Oberflächenterm} \to 0} - f\underline{\nabla}_p\chi^\alpha]$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}\chi^\alpha = 0 = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial q}} \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\chi^\alpha f) + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q(\chi^\alpha f) - f\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\chi^\alpha\right] = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\langle\chi^\alpha\rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\underline{\nabla}_q\cdot\frac{1}{m}\langle\underline{p}\,\chi^\alpha\rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{\underline{F}\cdot\langle\underline{\nabla}_p\chi^\alpha\rangle}_{\text{Quelle/Senke}}} \quad (4.33)$$

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle\chi^\alpha\rangle$

Anwendung auf

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}n + \underline{\nabla}_q\cdot\underline{j} = 0\\ &\quad\text{mit } \underline{j} = n\underline{u} = \left\langle\frac{\underline{p}}{m}\right\rangle\end{aligned}}$$

... Kontinuitätsgleichung

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i \quad i = 1,2,3 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{j_i}_{\frac{\langle p\rangle}{m}} + \frac{1}{m}\nabla_j \langle p_i p_j\rangle = n F_i$$

weil $F_j \cdot \langle \nabla_{p_j} p_i\rangle = F_j \langle \delta_{ij}\rangle = F_i n$

$$m^2 \langle \overbrace{(\underline{u}+\underline{c})_i (\underline{u}+\underline{c})_j}\rangle \underset{\langle c_i\rangle}{=} m^2 n u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j\rangle$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\underbrace{m\frac{\partial}{\partial t} j_i}_{\text{Impuls-dichte}} + \nabla_j \underbrace{(\underbrace{mnu_i u_j}_{mj_i} - T_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i} \qquad (4.35)$$

$mnu_i u_j$ ... konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ ... Spannungstensor (= − Drucktensor)

nF_i ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umformung: $m\frac{\partial}{\partial t} nu_i + \nabla_j (mnu_i u_j)$

$$= mn\frac{\partial}{\partial t}u_i + \overline{mu_i\frac{\partial}{\partial t}n + mu_i\nabla_j(nu_j)} + mnu_j\nabla_j u_i$$

$$mu_i\left(\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla_j(nu_j)\right) = 0 \quad (4.34)$$

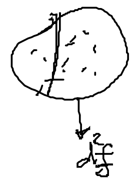
$\longrightarrow$ Umschreibung: mit (4.34):

$$\boxed{\underbrace{mn}_{\text{Massen-dichte}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla_q\right)}_{\text{totale/materielle Zeitableitung}} u_i = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte!}} + nF_i} \qquad (4.36)$$

Konvektive

$\left[\int d^3q\, \nabla_j T_{ij} \overset{\text{Gauß}}{=} \int T_{ij}\, d^2 f_j\, !\right]$

z.B. Druck-/Reibungskräfte



(4.36) ≡ Newtonsche Grundgleichung

linke Seite: Beschleunigung eines Volumenelements mit Geschw. $\underline{u}$

$$\left[\frac{d\,\underline{u}(q,t)}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\dot{q}_j}_{u_j}\cdot\nabla_j \underline{u}\right]$$

rechte Seite: Oberflächen (innere) + äußere Kräfte auf Vol. element