I.3. Konservative Kräfte, Potentiale

$\underline{F}_i$ (Kraft auf Teilchen i) lässt sich als Gradient eines Potentials darstellen

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N) \qquad i = 1, \ldots, N$$

skalares Potential - potentielle Energie

Gradient bezgl. Teilchen i

Beispiel:

Gravitationskraft, die von einer Masse M bei $\underline{r} = 0$ auf eine Punktmasse m ~~bei~~ am Ort $\underline{r}$ wirkt

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma m M \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

Potential

$$\Rightarrow V(\underline{r}) = -\gamma m M \frac{1}{|\underline{r}|} = -\gamma m M \frac{1}{r} \qquad \text{mit } r = |\underline{r}|$$

check: $$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\underline{r}}{r}}_{\substack{\text{Einheitsvektor} \\ \text{in Richtung } \underline{r}}} = -\frac{\underline{r}}{r^3} \quad ✓$$

Andere, aber äquivalente Formulierung für konservative Kräfte:

"Die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit entlang eines Weges C vom Ort $\underline{r}_1$ zum Ort $\underline{r}_2$ hängt nicht von der Form dieses Weges ab!"

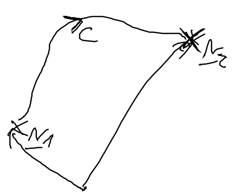
definiere Arbeit (gilt allgemein, nicht nur für konservative Kräfte!)

$$\boxed{W_{21} = -\int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})}$$

Kurvenintegral

Wegelement

Weg



"Arbeit, die aufgebracht (geleistet) werden muss, um einen Massenpunkt gegen die Kraft $\underline{F}$ von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ zu bewegen"

Sei nun $\underline{F}$ konservativ:

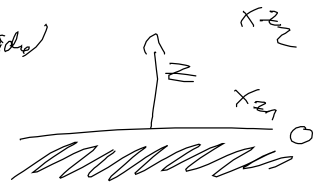
also $\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r})$

$$\Rightarrow W_{21} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\left(-\nabla V(\underline{r})\right) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\nabla V(\underline{r}) = \underline{\underline{V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)}}$$

$\Rightarrow$ Es kommt also nur auf das Potential am Anfangs- und Endpunkt an!!

Für nicht-konservative Kräfte kann W_{21} auch von der betrachteten Kurve abhängig!

z.B. "Schwerefeld" (Körper der Masse m in der Nähe der Erdoberfläche)



$$\underline{F} = -mg\,\hat{e}_z = -\nabla(mgz)$$

$$W_{21} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} d\underline{r}\cdot\overbrace{(-mg\,\hat{e}_z)}^{\underline{F}} = mg\,(z_2 - z_1)$$

$$\text{mit } \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Annahme: $z_2 > z_1$, dann folgt $W_{21} > 0$. Konsistent mit der Erwartung, dass Arbeit gegen das Schwerefeld ~~[illegible]~~ aufgewendet werden muss.

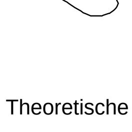
<u>Weitere Folgerung</u>:

Für konservative Kräfte gilt

$$\oint d\underline{r}\cdot\underline{F}(\underline{r}) = 0 \qquad \left(\text{da } V(\underline{r}_2) = V(\underline{r}_1)\right)$$

geschlossenes Kurvenintegral

d.h. $\underline{r}_2 = \underline{r}_1$



Schließlich kann man eine konservative Kraft charakterisieren durch

$$\text{rot}\,\underline{F} = \nabla \times \underline{F} = 0$$

Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ muss wirbelfrei sein!

Begründung:

$$\underline{F} = -\nabla V(\underline{r}) \quad (*)$$

V sei zweimal stetig differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_k}$$

wobei x_k, x_l sind Komponenten des Ortsvektors

$$\overset{\text{mit } (*)}{\Longrightarrow} \frac{\partial F_k}{\partial x_l} = \frac{\partial F_l}{\partial x_k}$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkung:

Genau genommen ist $\text{rot}\,\underline{F} = 0$ zunächst nur notwendige Bedingung für konservative Kraft. Sie wird zu ~~hinr~~ hinreichenden Bedingung, wenn das Gebiet, in dem $\text{rot}\,\underline{F} = 0$, einfach zusammenhängend ist

└ jeder geschlossene Weg in dem Gebiet muss sich zu einem Punkt zusammenziehen lassen, der immer noch im Gebiet liegt

Alternativ ~~kann~~ kann man $\text{rot}\,\underline{F} = 0$ begründen einfach über den Stokes'schen Integralsatz

Stokes

$$\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = \underbrace{0}_{\text{konservative Kraft}} = \underbrace{\int_A d\underline{A} \cdot \text{rot}\,\underline{F}}_{\text{Flächenintegral}}$$

Ergebnis soll für alle Flächenelemente $d\underline{A}$ gelten
$\rightarrow \text{rot}\,\underline{F} = 0$

Weitere Bemerkungen zum Thema konservative Kraft

i) Es gibt nicht nur konservative Einteilchenkräfte, sondern auch entsprechende Zweiteilchenkräfte

Teilchenindex $i, j = 1, \dots, N$

$$\underline{F}_{ij} = -\nabla_i \underbrace{V(\underline{r}_i, \underline{r}_j)}_{\text{Zweiteilchenpotential}}$$

$$\underline{F}_{ji} = -\nabla_j V(\underline{r}_i, \underline{r}_j)$$

Beachte: Es muss das dritte Newton'sche Axiom gelten!
"actio gegengleich reactio", d.h. $\underline{F}_{ji} = -\underline{F}_{ij}$

Das ist automatisch erfüllt, falls $V(\underline{r}_i, \underline{r}_j)$ die Form $V(\underbrace{\underline{r}_i - \underline{r}_j}_{\text{Verbindungsvektor}})$ hat, oder auch $V(\underbrace{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}_{\text{Betrag des Verbindungsvektors}})$

check: sei $V = V(\underline{r}_i - \underline{r}_j)$

$$\Rightarrow \underline{F}_{ij} = -\nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = -\left(-\nabla_j V(\underline{r}_i - \underline{r}_j)\right) = -\underline{F}_{ji}$$

Beispiele: Gravitationskraft, Coulombkraft

ii) Beispiele für nicht-konservative Kräfte

- Reibungskraft (Stokes) : $\underline{F}_i = -\underset{\text{Reibungskonstant}}{\gamma}\, \underset{\text{Geschwindigkeit}}{\underline{v}_i}$
- Lorentzkraft $\underline{F}_i = \underset{\text{Ladung}}{q}\Big(\underset{\text{elektr. Feld}}{\underline{E}} + \dfrac{\underline{v}_i}{c} \times \underset{\text{Magnetfeld}}{\underline{B}}\Big)$

Bem: geschwindigkeitsabhängige Kräfte werden häufig als dissipativ bezeichnet!

iii) Begriff der Leistung

Ausgangspunkt: allgemeine Definition der Arbeit

$$W_{21} = -\int_{C,\,r_1}^{r_2} d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \quad ⊛$$

mit $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$ Geschw.

Leistung : Arbeit pro Zeiteinheit

Das kann man explizit mit ⊛ ausdrücken, indem man im Kurvenintegral die Kurve C parametrisiert

$\underline{r} = \underline{r}(\alpha)$ ← Parameter , benutze hier: $\alpha = t$ (Zeit)

$d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{d\alpha} d\alpha$, hier: $d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt} dt = \underline{v}\, dt$

Kurvenintegral wird also in Zeitintegral umgewandelt!

Einsetzen in ⊛

$$\Rightarrow W = -\int_{t_0}^{t} \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t') \cdot \dot{\underline{r}}(t')\, dt'$$

geleistete Arbeit zum Zeitpunkt t

mit t_0: gehört zum Ort $\underline{r}_1$

t : gehört zum Ort $\underline{r}_2$

Erinnerung: Leistung $\hat{=}$ Arbeit pro Zeiteinheit

$\Rightarrow$ interpretiere $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t') \cdot \dot{\underline{r}}(t')$ als momentane Leistung der Kraft zum Zeitpunkt t'

I.4. Erhaltungssätze

Betrachte System aus N Massepunkten $(i = 1, .., N)$

Kraft auf Teilchen i (Masse m_i)

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_N, \underline{\dot{r}}_1, \ldots, \underline{\dot{r}}_N, t)$$

$$= \underbrace{\underline{F}_i^{\text{extern}}}_{\text{Einteilchenbeitrag}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij}}_{\text{Zweiteilchenbeitrag (z.B. Gravitation)}}$$

<u>Definiere</u>

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \quad \text{Schwerpunkt}$$

Beispiel: $N=2$, $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \underline{R} = \frac{m}{M}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2)$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2)$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\dot{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i$$

(linearer) Gesamtimpuls

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} \overbrace{(\underline{r}_i \times \underline{p}_i)}^{\text{Vektorprodukt}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i \quad \text{mit } \underline{l}_i = \underline{r}_i \times \underline{p}_i$$

Gesamtdrehimpuls

Wir zeigen nun:
Unter bestimmten Bedingungen gelten für diese (und damit zusammenhängende) Größen <u>Erhaltungssätze</u>, d.h. die Größen ändern sich nicht mit der Zeit!

Dies kann benutzt werden, um die Bewegungsgleichungen (BWGL) des Systems zu vereinfachen!

a) Lineare Gesamtimpuls

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i \quad \circledast$$

betrachte $\underline{P} = \underline{P}(t)$ (denn $\underline{p}_i = \underline{p}_i(t)$)

Erinnerung: Für Einzelteilchen gilt
$\underline{F}_i = \dot{\underline{p}}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i$

$$\dot{\underline{P}}(t) = \frac{d}{dt}\underline{P}(t) \overset{\circledast}{=} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\dot{\underline{p}}_i} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i$$

Gesamtkraft

2. Newton'sches Axiom

benutze Ansatz für Kräfte

$$\dot{\underline{P}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij}$$

Beachte: In der Doppelsumme (Zweiteilchenbeitrag) taucht jedes Paar (i,j) 2 mal auf

$\underline{F}_{23} + \underline{F}_{32}$

Wegen 3. Newton'schem Axiom (actio gegengleich reactio) gilt aber $\underline{F}_{ji} = -\underline{F}_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} = 0 \quad !!$$

$\Rightarrow$ Doppelsumme verschwindet !!

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{P}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}}}$$ Impulssatz

Insbesondere folgt:

In einem System ohne äußere Kräfte ($\underline{F}_i^{\text{extern}} = 0$) folgt offensichtlich

$$\dot{\underline{P}}(t) = 0 \iff \underline{P} = \text{const}$$

„Impulserhaltung"

Erinnerung: $\underline{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i$

Schwerpunkts-vektor

Umformulierung des Impulssatzes

benutze $$\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i = M \overbrace{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i}^{\dot{\underline{R}}} = M \dot{\underline{R}}$$

$$\dot{\underline{P}}(t) = M \ddot{\underline{R}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{\text{extern}}$$

Impulssatz

Es folgt:

Ohne äußere Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt $\underline{R}$ eines Systems gleichförmig oder bleibt in Ruhe ($\ddot{\underline{R}} = 0$)

„Schwerpunktssatz"

b) Gesamt-Drehimpuls

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{p}_i)$$

Produktregel

$$\dot{\underline{L}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\dot{\underline{r}}_i \times \underline{p}_i}_{0} + \underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i \right)$$

beachte: $\underline{p}_i = m_i \dot{\underline{r}}_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) = \underline{N}$$

2. Newton'sches Axiom

Gesamt-Drehmoment

Setze nun wieder $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{\text{extern}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \underline{F}_{ij}$

Nehme weiterhin an, dass $\underline{F}_{ij}$ eine sogenannte Zentralkraft ist

d.h. $\underline{F}_{ij} = f(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)\, \hat{\underline{r}}_{ij}$ mit $\hat{\underline{r}}_{ij} = \underbrace{\frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}}$ Verbindungsvektor

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}}(t) = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}}) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij})$$

für Zentralkraft: $\underline{F}_{ij} = f(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)\, \hat{\underline{r}}_{ij}$

betrachte Terme in der Doppelsumme, z.B. $i, j = 1,2$

z.B.: $\underline{r}_1 \times \underline{F}_{12} + \underline{r}_2 \times \underline{F}_{21}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{3. Axiom}}}{=} \underline{r}_1 \times \underline{F}_{12} + \underline{r}_2 \times (-\underline{F}_{12}) = (\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \times \underline{F}_{12}$$