Von Lagrange zu Hamilton:

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L \quad , \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \ , \ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \ k = 1,..,f$$

(2f) kanonischen Gleichungen

Beispiel

① 1-dim. harmonischer Oszillator

generalisierte Koordinate $q = x$ — Auslenkung

$(f=1)$ Potential $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ ($\Rightarrow F = -kx$ Hook'sches Gesetz) „Federkraft" — Federkonstante $(k>0)$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

generalisierter Impuls: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ entspricht dem gewöhnl. linearen Impuls in x-Richtung

$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$

Hamiltonfunktion:

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= T + V$$

oder mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ „Schwingungsfrequenz"

$$\rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2} \quad (*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{Energieerhaltung}$$

(plus skleronome Zwangsbed.)

$E = T + V = \text{const}$

$\Rightarrow H = T + V = \text{const}$
$= E$

→ Man kann (*) wie folgt umschreiben: (dividiere durch E)

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega_0^2}$$

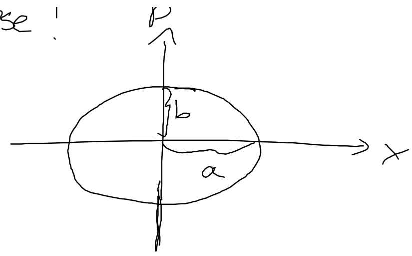
definiere: $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$, $b = \sqrt{2mE}$
$= \text{const}$ $\quad = \text{const}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1}$$

„Ellipsengleichung" mit Halbachsen a, b

Die Bahn des Systems im (hier zweidimensionalen) Phasenraum $\Gamma = (x, p)$

ist eine Ellipse!



Generell: Phasenraum Γ eines Systems wird aufgespannt durch die 2f Variablen $\{q_k\}$, $\{p_k\}$

Kanonische Gleichungen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

i) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

ii) $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega_0^2 x$

nochmal nach t ableiten.

aus i) $\ddot{x} = \dot{p}/m \iff m\ddot{x} = \dot{p}$ (Newton!)

aus ii) $\nearrow$ $= -m\omega_0^2 x$

$$\iff \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ Schwingungsgleichung!

Beispiel 2: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Erinnerung: $\underline{F}^{\text{Lorentz}} = e\,\underline{E}(\underline{q},t) + \frac{e}{c}\left(\underline{\dot{q}} \times \underline{B}(\underline{q},t)\right)$

hier: $\underline{q} = (x,y,z)$ Geschwindigkeit

nicht-konservativ!

Im Lagrangeformalismus kann man ein verallgemeinertes Potential $\tilde{U}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$ definieren, so dass die richtige BWGL herauskommt

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \underbrace{\Big(e\underbrace{\phi(q,t)}_{\text{skalares Potential}} - \frac{e}{c}\,\dot{q}\cdot\underbrace{A(q,t)}_{\text{Vektorpotential}}\Big)}_{\text{verallgemeinertes Potential } \tilde{U}(q,\dot{q},t)}$$

Übergang zu Hamilton:

Kanonisch-konjugierter Impuls

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m\dot{q}_k + \frac{e}{c}A_k(q,t) \quad , \quad k = x,y,z$$

Auflösung nach $\dot{q}_k$: $\quad \dot{q}_k = \frac{p_k}{m} - \frac{e}{mc}A_k(q,t)$

bzw. $\quad \dot{q} = \frac{p}{m} - \frac{e}{cm}A(q,t)$

Hamilton-Fkt.

$$H = \sum_{k=x,y,z} p_k\dot{q}_k - L = \sum_k p_k\left(\frac{p_k}{m} - \frac{e}{mc}A_k(q,t)\right) - L$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{e}{mc}\,p\cdot A - L$$

setze ein:

$$L = \frac{m}{2}\Big(\overbrace{\frac{p}{m} - \frac{e}{cm}A}^{\dot{q}}\Big)^2 - e\phi$$

$$+ \frac{e}{c}\Big(\underbrace{\frac{p}{m} - \frac{e}{cm}A}_{\dot{q}}\Big)\cdot A$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{m}\Big(p^2 - \cancel{\frac{e}{c}p\cdot A} - \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2$$

$$+ \cancel{\frac{e}{c}p\cdot A} - \frac{e}{c}p\cdot A + \left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2\Big) + e\phi$$

$$= \frac{\underline{p}^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{e}{c}\right)^2 \underline{A}^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{e}{c}\right)\underline{p}\cdot\underline{A} + e\phi$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}(\underline{q},t)\right)^2 + e\phi(\underline{q},t)}$$

Hamiltonfkt. für Teilchen im elektromagnet. Feld

Bemerkungen

i) Hamilton'sche BWGL führen wieder auf Newton $m\ddot{\underline{q}} = \underline{F}$ Lorentz (hier ohne Beweis)

ii) H ist <u>nicht</u> dasselbe wie $T + \tilde{U}(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$!!

Zur Erinnerung:

$$T + \tilde{U} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2}_{\frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2} + \underbrace{e\phi - \frac{e}{cm}\overbrace{\left(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)}^{m\dot{\underline{q}}}\cdot\underline{A}}_{\tilde{U}(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)}$$

Der letzte Term fehlt in H !!

iii) Der in H vorkommende Ausdruck

$\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}(\underline{q},t)$ heißt <u>Kinetischer Impuls</u>

Zu unterscheiden vom kanonisch-konjugierten Impuls

$$p_K = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_K} = m\dot{q}_K + \frac{e}{c}A_K$$

$$\underline{p} = m\dot{\underline{q}} + \frac{e}{c}\underline{A}$$

iv) H liefert Ausgangspunkt für die Diskussion des Problems in der Quantenmechanik !!

z.B. Wasserstoffatom im Magnetfeld

II.13. Hamilton'sche Gleichung aus einem Variationsprinzip

Erinnerung: Lagrange-Gl.:

Hamilton'sches Prinzip

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

Wirkungsintegral

für beliebige Abweichungen von den wirklichen Bahnkurven $\{q_k(t)\}$. Dabei bleiben Anfangs- und Endpunkte konstant!

Variieren bzgl. $\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}$ nicht t!

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

. Auch anwendbar für Felder!

jetzt:

Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip

Ersetze L im Originalausdruck für S durch die inverse Legendre-Transformierte, d.h.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H(\{q_k\}, \{p_k\}, t) \right)$$

Umkehrung

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

Zeige nun:

Aus der Forderung $\delta S \overset{!}{=} 0$ folgen die Hamilton'sche BWGL, falls man folgendes beachtet:

- variiere nach $\underbrace{\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}}_{\text{wie in der Lagrange-Mechanik}}$ und $\underbrace{\{p_k\}}_{\text{neu!}}$, aber nicht nach der Zeit!

- es gilt $q_k(t_1) = \text{const}$, $q_k(t_2) = \text{const}$ wie bei Lagrange

Durchführung:

definiere $F = F(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, \{p_k\}) = \sum_k p_k \dot{q}_k - H$

Variation

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(F(\{q_k + \delta q_k\}, \{\dot q_k + \delta \dot q_k\}, \{p_k + \delta p_k\}) - F(\{q_k\}, \{\dot q_k\}, \{p_k\}) \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F}{\partial \dot q_k} \delta \dot q_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k \right)\right) \quad (*)$$

Kleine Variation!

benutze $F = \sum_{k=1}^{f} (p_k \dot q_k) - H$ und $H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot q_k} = p_k, \quad \frac{\partial F}{\partial p_k} = \dot q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Aus (*)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k + p_k \delta \dot q_k + \left(\dot q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \delta p_k \right) \quad (**)$$

Zweiter Term:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, p_k \delta \dot q_k = \int_{t_1}^{t_2} dt\, p_k \frac{d}{dt} \delta q_k \stackrel{\text{partiell integrieren}}{=} \underbrace{\left[p_k \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}}_{\text{Null!}} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot p_k \delta q_k$$

da $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$

$(q_k(t_1) = \text{const}, \ q_k(t_2) = \text{const})$

Einsetzen in (**)

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \dot{p}_k \, \delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \delta p_k \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left(-\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \delta q_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \delta p_k \right)$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

Das muß unabhängig für jede beliebige Variation δq_k, δp_k gelten!

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \stackrel{!}{=} 0$$

Kanonische Gleichungen!!

II.14. Kanonische Transformationen

In der Lagrange-Mechanik gibt es eine „Forminvarianz":

Wahl der generalisierten Koordinaten ist nicht eindeutig,
eine Transformation $\{q_k\} \to \{Q_k\}$ mit $k = 1, \dots, f$ läßt die
Form der Lagrange-BWGL unverändert!

d.h. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, dann gilt $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = 0$

wobei $\tilde{L} = L\left(\{q_k(\{Q_k\})\}, \{\dot{q}_k(\{\dot{Q}_k\})\}\right)$

Wichtig für Hamilton-Mechanik

Transformation der generalisierten Koordinaten ändert auch den kanonisch konjugierten Impuls !!

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \quad !$$

Frage nun:

Unter welchen Transformationen $(\{q_k\}, \{p_k\}) \longrightarrow (\{Q_k\}, \{P_k\})$

sind die Hamilton gleichungen forminvariant!

D.h. für welche Transformation folgt aus $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

auch $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$ mit $\tilde{H} = \tilde{H}(\{Q_k\}, \{P_k\})$?

$\Rightarrow$ Definitionen der kanonischen Transformation !

Motivation für solche Transformation

Sei in der Lagrange-Formulierung die Variable q_k zyklisch

d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \overset{\text{BWGL}}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

$\Rightarrow$ die Größe $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist Erhaltungsgröße! $(\dot{p}_k = 0)$

trotzdem muß $\dot{q}_k$ im Lagrange-Bild weiter mitgeführt werden, denn es gilt nicht automatisch $\frac{d}{dt}\dot{q}_k = 0$

Hamilton-Formalismus:

- $\dot{p}_k = 0 \Longrightarrow -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ $\Rightarrow$ q_k ist auch ein zykl. Koordinate im Hamiltonformalismus

  Kanon. Gl.

  $\Leftrightarrow$ q_k tritt nicht als Variable in H auf

Darüber hinaus ist aber auch p_k keine echte Variable mehr, sondern kann durch $\alpha_k = p_k = \text{const.}$ ersetzt werden!

In der Hamilton'sche Formulierung hat man nun noch $f-1$ Freiheitsgrade!

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots q_f, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \ldots p_f)$$

Idee der kanonischen Transformation:

Lösung eines mechanischen Problems dadurch, dass man durch geeignete (d.h. kanonische) Transformation $\{q_k\} \rightarrow \{Q_k\}$ alle Koordinaten zu zyklische Koordinaten macht!!

Vorteil:
In einem solchen Fall gilt $\tilde{H} = \tilde{H}(P_1, \ldots, P_f)$, mit $P_k = \alpha_k = \text{const}$

$\Rightarrow \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$ hängen ~~nur~~ höchstens noch linear von der Zeit ab!