Wh: Kinetische Energie des starren Körpers.

$$T = \frac{M}{2} v_S^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu} \omega_\nu$$

Komponenten der Winkelgeschw.

Komponenten des Trägheitstensors z.B. im Kontinuierlichen Fall

$$J_{\mu\nu} := \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right]$$

$\underline{r}'$: Vektoren im Körperfesten System (K')

Verabredung: Ursprung dieses Systems = Schwerpunkt des Körpers!

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} v_S^2}_{\text{Translations-anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega} \, \underline{\underline{J}} \, \underline{\omega}}_{\text{Rotationsanteil}}$$

v_S: Schwerpunktsgeschw.

$\underline{\underline{J}}$: Tensor 2. Stufe (Matrix) mit Komponenten $J_{\mu\nu}$

Eigenschaften:

$\underline{\underline{J}}$ ist Tensor 2. Stufe (Dreheigenschaften!), linear in der Massenverteilung,

$\underline{\underline{J}}$ wird dargestellt durch reelle, symmetrische Matrix!

⋮

ν) $\underline{\underline{J}}$ ist diagonalisierbar durch orthogonale Transformation (mit Hilfe einer Drehmatrix $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$)

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T, \quad \det \underline{\underline{R}} = 1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = 1$$

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}} \, \underline{\underline{J}} \, \underline{\underline{R}}^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

mit J_1, J_2, J_3: Eigenwerte von $\underline{\underline{J}}$

Spalten von $\underline{\underline{R}}$: Eigenvektoren von $\underline{\underline{J}}$

„anschauliche" Deutung:

Achsen des Körperfesten Systems K' können immer so gedreht werden, dass $\underline{\underline{J}}$ diagonal wird!!

Andere Bezeichnung:

- die Eigenwerte J_1, J_2, J_3 nennt man auch "Hauptträgheitsmomente"
- " Eigenvektoren: „Hauptträgheitsachsen" ⟺ diese entsprechen den neuen Achsen von K' nach der Drehung!!

⟹ „Hauptachsensystem"

Im Hauptachsensystem hat $\underline{\underline{J}}$ dann die (explizite) Form

$$\underline{\underline{J}}' = \int dy\, \rho(\underline{y}) \begin{pmatrix} Y_2^3+Y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1^2+Y_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1^2+Y_2^2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus der Def. von $J_{\mu\nu}$ für den diagonalen Fall!

Y_i sind die Komponenten des Vektors $\underline{Y}$

$\Rightarrow J_i \geq 0 \quad (i=1,2,3)$: Die Matrix ist positiv semidefinit

Praktische Durchführung der Diagonalisierung

Eigenwerte aus dem charakteristischen Polynom

$$\det(\underline{\underline{J}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow$ die drei Lösungen für λ entsprechen den Eigenwerten J_1, J_2, J_3

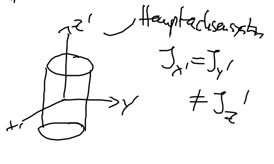
Eigenvektoren (Hauptachsen) aus dem homogenen, linearen Gleichungssystem

$$\underline{\underline{J}}\, \underline{j}_i \overset{!}{=} J_i\, \underline{j}_i$$

Eigenvektor von $\underline{\underline{J}}$ zum Eigenwert J_i $(i=1,2,3)$

Beachte: Man nennt starre Körper mit

- $J_1 \neq J_2,\ J_1 \neq J_3,\ J_2 \neq J_3$ „unsymmetrischer Kreisel"
- $J_1 = J_2 \neq J_3$ (oder analog für andere Kombinationen) „symmetrischer Kreisel"
- $J_1 = J_2 = J_3$ „Kugelkreisel"



Noch eine weitere Bezeichnung:

sei $\underline{n}$ beliebige Achse

$\Rightarrow$ die Größe $J_n = \underline{n} \cdot \underline{\underline{J}}\, \underline{n}$ heißt Trägheitsmoment bzgl. der Achse $\underline{n}$

Rotationsanteil der kinetischen Energie

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\cdot\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$$

(Erinnerung: Richtung von $\underline{\omega}$ entspricht Drehachse!)

Falls speziell $\underline{\omega}$ parallel zu einer der drei Hauptträgheitsachsen $\underline{j}_i$ — normiert, $|\underline{j}_i| = 1$

d.h. $\underline{\omega} = \omega\,\underline{j}_i$, $\omega = |\underline{\omega}|$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \underline{\underline{J}}\,\omega\,\underline{j}_i = J_i\,\omega\,\underline{j}_i$$

benutze $\underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i = J_i\,\underline{j}_i$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,J_i\,\omega\,\underline{j}_i \underset{\underline{\omega} = \omega \underline{j}_i}{=} \frac{1}{2}\omega^2 J_i$$

$\underline{j}_i\cdot\underline{j}_i = 1$

allgemein:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\overbrace{\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}}^{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\underline{J}}\,\overbrace{\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}}^{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{R}}^T\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T}_{\underline{\underline{J}}'}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\omega}$$

$\underline{\underline{J}}'$: diagonal!!

$$= \frac{1}{2}\underline{\omega}'\,\underline{\underline{J}}'\,\underline{\omega}'$$

benutze $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$ und $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T \Rightarrow \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{\omega} = \underline{\omega}'$$
$$(\underline{\omega}\,\underline{\underline{R}}^T) = (\underline{\omega}')^T$$

Folgerung

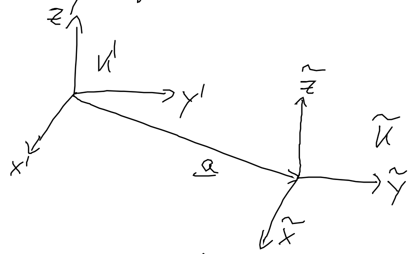
$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\omega'_\mu\,\underbrace{J'_{\mu\nu}}_{J_\mu\delta_{\mu\nu}}\,\omega'_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\omega'^2_\mu\,J_\mu$$

Hauptträgheitsmomente!

III.5. Der Satz von Steiner

Sei $\underline{\underline{J}}$ der Trägheitstensor in einem (im Schwerpunkt S verankerten) körperfesten System K'.

Sei $\tilde{K}$ ein zu K' achsenparalleles ($\hat{=}$ nicht gedreht!), um einen Vektor $\underline{a}$ verschobenes Koordinatensystem



Dann ist $\tilde{\underline{\underline{J}}}$, d.h. der Trägheitstensor bezgl. $\tilde{K}$, gegeben durch

$$\boxed{\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M\left(\underline{a}^2\,\delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu\right)}$$

Satz von Steiner!

Man muß also „nur" die Komponenten von $\underline{\underline{J}}$ in einem Koordinatensystem kennen und kann damit die Komponenten in einem dazu verschobenen System hinschreiben!

Beweis

zunächst kontinuierlich:

Ortsvektor bezgl. $\tilde{K}$

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\tilde{\underline{r}}\; \tilde{\rho}(\tilde{\underline{r}}) \left(\tilde{\underline{r}}^2 \delta_{\mu\nu} - (\tilde{\underline{r}})_\mu (\tilde{\underline{r}})_\nu\right)$$

Integration in $\tilde{K}$

Def. von $\underline{\underline{J}}$ in $\tilde{K}$

benutze $\tilde{\underline{r}} = \underline{r}' + \underline{a}$

$$= \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left((\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} + 2\,\underline{a}\cdot\underline{r}'\,\delta_{\mu\nu} + \underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} \right)$$

Integration in K'

$$- \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left[(\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu + (\underline{r}')_\mu (\underline{a})_\nu + (\underline{r}')_\nu (\underline{a})_\mu + (\underline{a})_\nu (\underline{a})_\mu \right]$$

benutze nun: $\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')\, \underline{r}' = 0$!!

Schwerpunkt liegt jetzt wieder im Ursprung von K' !

$\Rightarrow$ alle Terme linear in $\underline{r}'$ oder in einer Komponente von $\underline{r}'$ verschwinden!!

$$\Rightarrow \tilde{J}_{\mu\nu} = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}') \left((\underline{r}')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}')_\mu (\underline{r}')_\nu \right)$$

$$+ \underbrace{\int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')}_{M} \left[\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu \right]$$

beachte: $\underline{a}$ ist konstanter Vektor!!

$$= J_{\mu\nu} + M \left(\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu \right)$$

q.e.d.

(natürlich!)
gilt auch im diskreten Fall:

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\tilde{\underline{r}}_i^2 \delta_{\mu\nu} - (\tilde{\underline{r}}_i)_\mu (\tilde{\underline{r}}_i)_\nu \right)$$

, benutze $\tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i' + \underline{a}$

$\vdots$

Einsetzen und benutze, dass $\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i' = 0$ Schwerpunkt im Ursprung!

$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{r}_i')^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{r}_i')_\mu (\underline{r}_i')_\nu \right)}_{J_{\mu\nu}}$$

$$+ M \left(\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu \right)$$

Folgerungen aus dem Satz von Steiner

- Für das Trägheitsmoment bzgl. einer beliebigen Achse $\underline{n}$ gilt im System $\tilde{K}$:

$$\tilde{J}_n = \underline{n}\,\underline{\underline{\tilde{J}}}\,\underline{n} = \sum_{\mu\nu} n_\mu \tilde{J}_{\mu\nu} n_\nu \qquad \mu,\nu = 1,2,3$$

(einsetzen: $\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M\left(\underline{a}^2 \delta_{\mu\nu} - (\underline{a})_\mu (\underline{a})_\nu\right)$)

$$= \sum_{\mu\nu} n_\mu J_{\mu\nu} n_\nu + M \underline{a}^2 \underbrace{\sum_{\mu\nu} n_\mu \delta_{\mu\nu} n_\nu}_{\sum_\mu n_\mu^2} - M \sum_{\mu\nu} n_\mu \overset{(\underline{a})_\mu}{a_\mu} n_\nu \overset{(\underline{a})_\nu}{a_\nu}$$

$$= \overbrace{\underline{n}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{n}}^{J_n} + M \underline{a}^2 \underline{n}^2 - M(\underline{a}\cdot\underline{n})^2$$

also: $$\boxed{\tilde{J}_n = J_n + M\left(\underline{a}^2 - (\underline{a}\cdot\underline{n})^2\right)} \quad (*)$$

Sei speziell $\underline{n}$ eine der Hauptachsen von $\underline{\underline{J}}$, also $\underline{n} = \underline{j}_i$ (normierter Eigenvektor)

(also $\underline{\underline{J}}\,\underline{j}_i = J_i \underline{j}_i$ bzw. $\underline{\underline{J}}\,\underline{n} = J_i \underline{n}$)

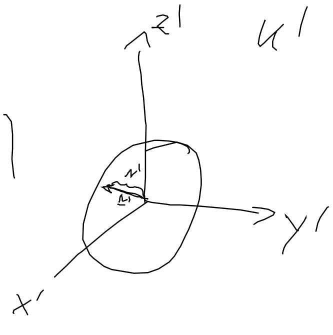
Dann folgt aus (*)

$$\tilde{J}_i = J_i + M\left(\underline{a}^2 - a_i^2\right) \qquad \text{mit } a_i = \underline{a}\cdot\underline{n} = \underline{a}\cdot\underline{j}_i$$

<u>Anwendungsbeispiel</u> (Trägheitstensor, Satz von Steiner)

Kugelsymmetrische Massenverteilung

$$\rho(\underline{r}') = \rho(r') \qquad \text{mit } r' = |\underline{r}'|$$



Es gilt:

$\underline{\underline{J}}$ (bzgl. K') ist diagonal in <u>allen</u> Koordinatensystemen, die im Schwerpunkt der Kugel verankert sind !!

$$\Leftrightarrow J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \qquad \text{(Nebendiagonalelemente)}$$

denn z.B.

$$J_{xy} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left((\underline{r}')^2 \overset{0}{\widetilde{\delta_{xy}}} - x'y' \right) = \int d\underline{r}'\, \rho(r') \, (-x'y')$$

$$= \int_0^\infty dr'\, r'^2 \rho(r') \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(- \underbrace{r'\sin\vartheta'\cos\varphi'}_{x'} \underbrace{r'\sin\vartheta'\sin\varphi'}_{y'} \right)$$

Auswertung in Kugelkoordinaten

$= \ldots = 0$ wegen der φ'-Integration !!

und : $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J$

$(J_1 = J_2 = J_3)$

Berechnung von J

benutze Def. von $J_{\mu\nu}$ in K'

$$J = \frac{1}{3}(J_1 + J_2 + J_3) = \frac{1}{3} \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left(\underbrace{\overbrace{y'^2 + z'^2}^{\text{aus } J_{xx}} + \overbrace{x'^2 + z'^2}^{\text{aus } J_{yy}} + \overbrace{x'^2 + y'^2}^{\text{aus } J_{zz}}}_{2r'^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, 2r'^2$$ Integrand hängt nicht von den Winkeln ab!

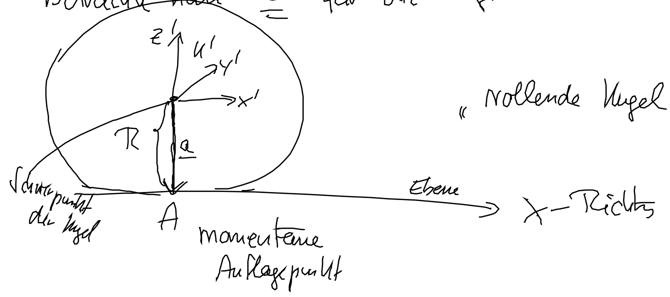
$$= \frac{2}{3} 4\pi \int_0^\infty dr'\, r'^2 \cdot r'^2 \rho(r')$$

Sei speziell $\rho(r') = \dfrac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$, $r' < R$, (Null für $r' > R$)

homogene Massenverteilung !!

$$\Rightarrow J = \frac{2}{R^3} M \int_0^R dr' (r')^4 = \underline{\underline{\frac{2}{5} M R^2}}$$

betrachte nun $\underline{\underline{J}}$ für die Kugel in einem anderen Koordinatensystem



Trägheitsmoment bezgl. ein Koordinatensystem $\hat{K}$ zentriert in A ?

Satz von Steiner mit $\underline{a} = -R\,\hat{\underline{e}}_{z'}$, $|\underline{a}| = R$ Kugelradius (Radius)

$$\tilde{J}_{x'} = \overset{\text{bzgl. } K'}{J_x} + M\left(\underline{a}^2 - (\underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_{x'})^2\right)$$

$$= J + M\left(\underline{a}^2 - \underbrace{a_{x'}^2}_{0}\right) = J + MR^2 \overset{\text{homogene Massenverteilung}}{=} \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \underline{\underline{\frac{7}{5}MR^2}}$$

$$\left(= \tilde{J}_{y'}\right)$$

$$\tilde{J}_{z'} = J + M\left(\underline{a}^2 - (\underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_{z'})^2\right) = J + M(R^2 - R^2) = J = \underline{\underline{\frac{2}{5}MR^2}}$$

Trägheitstensor der Kugel ist in $\hat{K}$ (zentriert in A)

immer noch diagonal, aber nicht mehr kugelsymmetrisch !!

hier nicht explizit gezeigt, aber leicht zu sehen!