

II.12. Der Hamilton-Formalismus

→ neue Formulierung der Mechanik!

bisher:

- Newton-Mechanik: sehr allgemeines Konzept (Newton'sche Axiome),
 listet alle Typen von Kräften zu,
 das etwas „unhandlich“ für Systeme mit Zwangskräften!
 (relevante Größe: $N_i(t)$)
 Trajektorie

- Lagrange-Mechanik:

größte Vorteil im Vergleich zu Newton:

Eliminierung der Zwangskräfte!

⇔ die relevanten Größen sind die generalisierten Koordinaten
 und Geschwindigkeiten $\{q_k, \dot{q}_k\}$

BWOC aus Hamilton'schem (oder d'Alembert'schem) Prinzip

Isokrone, konservative Systeme: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, \dots, f$

f Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Zeit
 für die $q_k(t)$

Warum nun noch eine neue Formulierung?

Für bestimmte Erweiterungen (Quantenmechanik, Statistische Physik)

ist es vorteilhaft, statt den Variablen $\{q_k\}$ und $\{\dot{q}_k\}$

die Variablen $\{q_k\}$ und die dazugehörigen generalisierten Impulse $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
 zu benutzen!

also:

Lagrange

Hamilton

$\{q_k, \dot{q}_k, t\} \longrightarrow \{q_k, p_k, t\}$

neuer Satz unabhängiger Variablen!

Wir werden sehen.

Hamilton-BWOC bilden einen Satz von 2f
 Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Zeit
 für die $\{q_k, p_k\}$

Die Variablentransformation wird mit Hilfe der sogenannten Legendre-Transformation durchgeführt

Exkurs: Legendre-Transformation

Zunächst eindimensional:

Gegeben: Funktion $f(x)$ mit $\frac{df(x)}{dx} = z$ Stetig von f bei x

Ziel: Statt x soll z als Variable verwendet werden.

Definition die Legendre-Transformierte von f bzgl. x :

$$\begin{aligned} G f(x) &:= x \frac{df}{dx} - f(x) \\ &= p(z)z - f(p(z)) \\ &=: g(z) \end{aligned}$$

Setze ein $p(z) = x$

Annahme: der Zusammenhang $z = \frac{df}{dx}$ lässt sich nach x auflösen!

Voraussetzung: $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \neq 0$

denn falls z unabhängig von x , dann kann man nicht nach x auflösen!

Bemerkungen

- Die Funktion g hat als "richtige" Variable tatsächlich (nun) z (und nicht x)!

Betrachte dazu das Differential

$$\begin{aligned} dG &= d\left(x \frac{df}{dx} - f(x)\right) \\ &= \cancel{dx \cdot \frac{df}{dx}} + x \cdot d\left(\frac{df}{dx}\right) - \cancel{\frac{df}{dx} \cdot dx} \\ &= x d\left(\frac{df}{dx}\right) = x dz \end{aligned}$$

hieraus sieht man, dass jetzt z die richtige Variable ist

außerdem:

$$x = \frac{dG}{dz}, \quad \frac{d^2G}{dz^2} = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}} \neq 0$$

• Zweimaliges Anwenden der Legendre-Transformierte

$$\mathcal{L} \mathcal{L} \frac{f(x)}{g(z)} = \mathcal{L} g(z)$$

$$= z \frac{dG(z)}{dz} - G = zx - xz + f = f$$

von vorher:
 $G = xz - f$

führt also wieder auf die Ausgangsfunktion z zurück!!

Insgesamt: Die Transformierte $f \rightarrow \mathcal{L}f = G$
 ist umkehrbar eindeutig (falls $\frac{df}{dx} = \frac{dz}{dx} \neq 0$)

Beispiel:

$$f(x) = \alpha x^2 \Rightarrow z(x) = \frac{df}{dx} = 2\alpha x \quad \text{also} \quad \frac{dz}{dx} \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \varphi(z) = \frac{z}{2\alpha}$$

Transformierte:

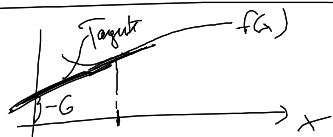
$$\mathcal{L} f(x) = x \frac{df}{dx} - f = x \cdot \frac{z}{2\alpha} - \alpha x^2$$

$$= \frac{z}{2\alpha} \cdot z - \alpha \left(\frac{z}{2\alpha}\right)^2 = \frac{z^2}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = + \frac{z^2}{4\alpha} = G(z)$$

$$\mathcal{L} G(z) = z \frac{dG}{dz} - G \quad z=2\alpha x$$

$$= z \cdot \frac{z}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = \frac{z^2}{2\alpha} - \frac{z^2}{4\alpha} = \frac{z^2}{4\alpha} = \frac{(2\alpha x)^2}{4\alpha} = \alpha x^2 = f(x)$$

• Graphische Veranschaulichung der Legendre-Transformierte



$$G(z) = x \frac{df}{dx} - f, \quad x = \varphi(z)$$

~~Form~~ Tangentengleichung bei x :

$$y = ax + b \quad \text{mit} \quad a = \frac{df}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 b &= f(x) - ax \\
 &= f(x) - \frac{df}{dx} x \\
 \Rightarrow y &= x \frac{df}{dx} + \underbrace{(f(x) - \frac{df}{dx} x)}_{-G}
 \end{aligned}$$

Die ursprüngl. Funktion $f(x)$ wird nach der Legendre-Transformation durch die Stiggy $\frac{df}{dx} = z$ und den negativen Achsenabschnitt auf der y -Achse charakterisiert!

Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf mehrere Variablen

gegeben: $F(\{x_l\}, \{u_l\})$ mit $l=1, \dots, m$

Legendre-Transformation bzgl. des Variablensets $\{x_l\}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} F &:= \sum_{l=1}^m x_l \frac{\partial F}{\partial x_l} - F(\{x_l\}, \{u_l\}) \\
 &= G(\{z_l\}, \{u_l\}) \quad \text{mit } z_l = \frac{\partial F}{\partial x_l}
 \end{aligned}$$

Umkehrtransformation eindeutig, falls $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} \right) \neq 0$

Ende Exkurs

Anwendung auf die Lagrangefunktion

$$L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$$

Ziel: ersetzen die $\{\dot{q}_k\}$ durch $\{p_k\}$ mit $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

$$\mathcal{L} L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) = \sum_{k=1}^f \underbrace{\dot{q}_k}_{p_k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

$$= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L =: H(q_k, p_k, t)$$

Hamiltonfunktion

Die Hamiltonfunktion ist also die ~~Legendre~~ Legendretransformierte der Lagrangefunktion bzgl. der generalisierten Geschwindigkeiten!

Betrachte das Differential:

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) \\ &= \sum_{k=1}^f d\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^f \dot{q}_k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - dL \\ &= \sum_{k=1}^f \cancel{d\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} + \sum_{k=1}^f \dot{q}_k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_{k=1}^f \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$dH = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \textcircled{*}$$

Nächste Frage:

Wie erhält man nun Bewegungsgleichungen?

Vergleiche dazu $\textcircled{*}$ mit dem Differential von H , das sich ergibt aus der Tatsache $H = H(q_k, p_k, t)$ ergibt

$$dH = \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \textcircled{**}$$

Koeffizientenvergleich der Differentiale $\textcircled{*}$ und $\textcircled{**}$ (diese müssen gleich sein!!)

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$k=1, \dots, f$

Hamilton'sche Bewegungsgleichungen (auch: kanonische Gleichungen)

Bemerkungen

- Die Hamilton'schen BwGL bilden 2 Sätze von Differentialgleichungen
2te Ordnung
in der Zeit für die q_k, \dot{q}_k, p_k

- Der $2f$ -dimensionale Raum $\Gamma := (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$
heißt "Phasenraum"
z.B. Oszillatoren

(wichtig in der Mechanik, aber auch z.B. in der statistischen Physik, wo man Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\Gamma)$ für Vielteilchensysteme hat!)

- Physikalische Bedeutung des Hamilton-Funkt.

für konservativ System mit holonom-scleronomem Zwangsbedingung

$$\begin{aligned} L &= T - V, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ H &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{2T} - L = 2T - L \\ &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \\ &= E \quad \text{Gesamtenergie!!} \end{aligned}$$

Für dissipative Systeme hatten wir bereits gesehen, dass die Gesamtenergie eine Erhaltunggröße ist (Zeit-translationssymmetrie)

Nochmaliger Nachweis im Hamilton-Formalismus

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} H(\{q_k\}, \{p_k\}, t) \\
 &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\
 &\stackrel{\text{Hamilton'sche BzWG}}{\rightarrow} \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \right) + \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \\
 &\quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \text{ für System mit nicht explizit zeitlichem Potential}
 \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const} \quad !!$$

Anwendungsschema des Hamilton-Formalismus

1) Wähle generalisierte Koordinaten $\{q_k\}$ und bestimme die Transformationsformel $\{r_i\} = \{r_i(q_1, \dots, q_f, t)\}$

2) Bestimme T , V (falls System konservativ) und Lagrange-Fkt. $\mathcal{L}(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$

3) Finde die generalisierte Impulse

$$\begin{aligned}
 p_k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad \rightarrow \quad p_k = p_k(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) \\
 &\quad \quad \quad \text{und umgekehrt} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(\{q_k\}, \{p_k\}, t)
 \end{aligned}$$

4) Stelle die Hamilton-Funktion auf..

$$\text{also: } H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - \mathcal{L} \quad (\text{Legendre-Transformiert})$$

Speziell:
Konservatives, skleronomes System: $H = T + V$

5) Aufstellen und Lösen der Hamilton'schen BzWG..

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad (\text{und } \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t})$$