

Lagrange-Glg und Hamilton'sches Prinzip

Betrachte ein System mit holonomem ZB und konservativen Kräften

$$\Rightarrow \text{Lagrange-Fkt } L = L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, t) = T - V$$

Definiere nun das sogenannte Wirkungsintegral

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1 \dots q_f, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_f, t)$$

Die physikalische Bahnkurve (d.h. die Lösung der BZGL)

zeichnen sich dadurch aus, dass

Hamilton'sches
Prinzip:

$$\boxed{\delta S = 0}$$

Die notwendige Bedg hierfür ist, dass die Bahnkurve die Lagrange-Glg 2. Art erfüllt

Beweis

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1 + \delta q_1, \dots, q_f + \delta q_f, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, t) \\ &\quad - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} \delta q_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\frac{d}{dt} \delta q_k} \delta \dot{q}_k \right) \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \stackrel{\text{part. Integration}}{=} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}$$

= 0 weil δq_k an den Rändern verschwindet

$$\Rightarrow \delta S = \int dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \stackrel{!}{=} 0$$

Generalisierte Koordinaten können getrennt (lokale ZB)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Bemerkungen:

- Unterschied d'Alembert \rightarrow Hamilton'sches Prinzip ist ein Integralprinzip. Man verbindet die tatsächliche Bahn mit differential beschreibbaren Bahnen und integriert!

- Erweiterung auf nicht-konservative Systeme (mit lokalem ZB)

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} (T - W) dt \quad \text{modifiziertes Wirkungsintegral}$$

mit $W = - \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$

tatsächliche Bahn aus $\delta \tilde{S} = 0$

Variation Integral auf

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Nebenrechnung zum erweiterten Hamilton'schen Prinzip

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt (T - W)$$

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k - \delta W \right)$$

Es gilt wieder

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0}$$

$$- \delta W = - \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = - \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad , \text{ da } \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

$$= - \sum_{k=1}^f \left(\sum_{i=1}^n \underline{F}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = - \sum_{k=1}^f Q_k \delta q_k$$

↑
generalisierte Kraft

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = + Q_k$$

II. 11 Eichtransformationen und Forminvarianz der Lagrange-Gleichung

Im Folgenden zeigen wir, dass die Lagrange-Fkt \mathcal{L} und die generalisierten Koordinaten $\{q_k\}$ durch die Lagrange-Gly nicht eindeutig festgelegt ist.

\Rightarrow bestimme Transformationen \tilde{q} über zu den gleichen BWSL \rightarrow damit zu gleichen Physik!

a) Eichtransformationen

Beh: Die Transformation $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} M(q_1, \dots, q_f, t)$ mit einer beliebigen "Eichfunktion" M löst die Lagrange-Gly invariant.

* aber nicht Geschwindigkeitsabhängig

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{c=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial M}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{c=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial M}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

beachte:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{c=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \sum_{c=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_c} \delta_{ck} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)}_{=0} = \frac{\partial M}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d}{dt} M$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{l=1}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\underbrace{\sum_{l=1}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \mathcal{L}}_{\frac{d\mathcal{H}}{dt}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

wichtige Anwendung:

Teilchen im elektromagnetischen Feld

(gleichzeitig ein wichtiges Bsp für nicht-konservative Kräfte)

betrachte ein Teilchen mit Masse m , Ladung e , in Anwesenheit eines elektrischen Feldes $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und eines magnetischen Feldes $\underline{B}(\underline{r}, t)$.

Annahme: keine Zwangsbedingung $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z) = \underline{r}$

\Rightarrow Newton'sche Bewegungsgleichung $m \ddot{\underline{q}} = \underline{F}^{\text{Lorentz}} = e \underline{E} + \frac{e}{c} (\dot{\underline{q}} \times \underline{B})$ (*)

(cgs-System)

Frage: Was ist die dazu gehörige Lagrange-Fkt L , sodass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{auf (*) folgt}$$

Zunächst: „konservativer Grenzfall“

$$\underline{B} = 0. \quad \text{Da } \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell'sches Induktionsgesetz})$$

$$\text{folgt } \nabla \times \underline{E} = 0 \quad \text{und damit } \underline{E} = -\nabla \phi(\underline{r}, t)$$

$$\Rightarrow \underline{F} = e \underline{E} = -e \nabla \phi \Rightarrow V(\underline{r}, t) = \underbrace{e \phi}$$

Energie eines geladenen Teilchens im Potential ϕ

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - e \phi(\underline{r}, t)$$

$$\mathcal{L} : \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = m \ddot{q}_k + e \frac{\partial}{\partial q_k} \phi = m \ddot{q}_k + e (\nabla \phi)_k = 0$$

$$\Rightarrow m \ddot{q}_k = e (-\nabla \phi)_k = e E_k$$