

$$\begin{aligned}
 J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1 \\
 J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= N_2 \\
 J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3
 \end{aligned}$$

Euler'sche Gleichungen
in (körperfesten)
Hauptachsensystem

→ Bewegungsgl. des starren Körpers!

Nehme' nun an, dass die äußeren Kräfte verschwinden

$$\Rightarrow N_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned}
 J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= 0 & \textcircled{1} \\
 J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) &= 0 & \textcircled{2} \\
 J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= 0 & \textcircled{3}
 \end{aligned} \right\}$$

Allgemeine Forderung aus ①-③ für den kräftefrei Fall

$$i) \quad \textcircled{1} \cdot \omega_1 + \textcircled{2} \cdot \omega_2 + \textcircled{3} \cdot \omega_3$$

$$\Rightarrow J_1 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3 \dot{\omega}_3 \omega_3$$

$$- \omega_1 \omega_2 \omega_3 \underbrace{\left[(J_2 - J_3) + (J_3 - J_1) + (J_1 - J_2) \right]}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} T^{\text{rot}} = 0$$

Zitat ableitet in
körperfesten System

⇒ Energieerhaltungssatz in
körperfesten System

(alternativ

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} T^{\text{trans}} + \frac{d}{dt} T^{\text{rot}} = 0 \quad \text{in Kräftefrei Fall}$$

und der glidflöng Schwerpunktsbewegun
 $T_{\text{trans}} = 0$)

ii) Mada nu $\textcircled{1} J_1 \omega_1 + \textcircled{2} J_2 \omega_2 + \textcircled{3} J_3 \omega_3$

$$\Rightarrow J_1^2 \dot{\omega}_1 \omega_1 + J_2^2 \dot{\omega}_2 \omega_2 + J_3^2 \dot{\omega}_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 (J_1 (J_2 - J_3) + J_2 (J_3 - J_1) + J_3 (J_1 - J_2)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i^2 \omega_i^2 \right) = 0$$

$\left| \frac{d}{dt} \frac{1}{2} |\underline{L}_{\text{rel}}|^2 = 0 \right.$

dam $\underline{L}_{\text{rel}} = \underline{J} \cdot \underline{\omega}$

$$= \sum_i J_i \omega_i \hat{e}_i$$

$$\Rightarrow |\underline{L}_{\text{rel}}|^2 = \sum_{i,k} J_i \omega_i J_k \omega_k \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \sum_i J_i^2 \omega_i^2$$

Zeitabläter in körperfeste Syst

\Rightarrow Betrag $\underline{L}_{\text{rel}}$ ist konstant!

Bedkte: Dies ist nicht offatlich, den die volle Berechn

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{\text{rel}} = \underline{N}_{\text{rel}}^{\text{exter}} = 0 \quad \text{d.h. Betrag und die Richtung ist konstant.}$$

\Rightarrow gilt in reduzierten System!

Frage: Ist die Richtung von $\underline{L}_{\text{rel}}$ auch in körperfeste Systen fest?

$$\underline{L}_{\text{rel}} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \hat{e}_i \Rightarrow \text{Richtung nur dann konstant}$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$ wenn $J_i \dot{\omega}_i = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = 0$$

$$= \omega_1 \omega_3 (J_3 - J_1) = \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2)$$

Für ein Kreisel mit $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

müssen zwei Komponente von $\underline{\omega}$ verschwinden

d.h. $\underline{\omega}$ muss parallel ein Hauptträgheitsachse sein!

\Rightarrow die Richtung von \underline{L}_{rel} im körperfesten System ist
 nur dann konstant, falls $\underline{w} \parallel \underline{J}_i$ ($i=1, 2, \text{ oder } 3$)

Drehachse parallel
 Hauptträgheitsachse

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} \parallel \underline{w} \parallel \underline{J}_i$$

Da \underline{L}_{rel} konstant im raumfesten System ist, folgt
 dass auch die Richtung von \underline{w} konstant!

Specialfall:

Kugelkreisel

d.h. $J_1 = J_2 = J_3 = J$ und \underline{J} die z-Achse

$$\underline{L}_{rel} = J \underline{w}$$

Eulersche Gleichungen $\Rightarrow J \dot{\omega}_i = 0 \quad \forall i=1, 2, 3$

\Rightarrow Drehachse \underline{w} ist sowohl im körperfesten als auch
 im raumfesten System konstant

Kräftefreie Bewegung $\hat{=}$ gleichförmige Rotation um die feste Achse \underline{w}

S. 8 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

$$J_1 = J_2 = J \neq J_3$$

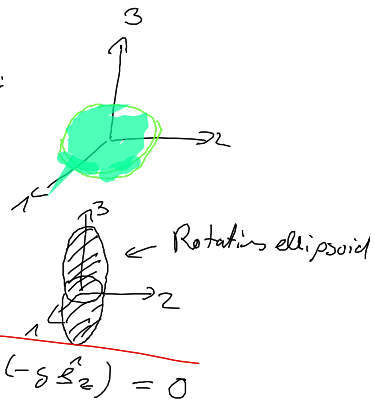
Beispiel:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

läßt sich dadurch realisieren, dass
 man den Kreisel im Schwerpunkt
 aufhängt, dann dann gilt:

$$\underline{N}_{rel} = \sum_{i=1}^N \underline{r}_i' \times \underbrace{(-m_i g \hat{z}_2)}_{\text{Schwerkraft}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i'}_0 \times (-g \hat{z}_2) = 0$$

Euler'sche Gleichungen:



$$J \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J - J_3) = 0 \quad (1)$$

$$J \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (J_3 - J) = 0 \quad (2)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (3)$$

Bemerkung: Die ausgezeichnete Achse \vec{e}_3 nennt man Figurnachse.

Beachte auch

$$(3) \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const}$$

Projektion von $\underline{\omega}$ auf der Figurnachse ist konstant!

Lösung der Glider (1) und (2)

$$(1) \Rightarrow J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_3 \omega_2 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \omega_0 \omega_2 \quad (1a)$$

$$(2) \Rightarrow J \dot{\omega}_2 = (J_3 - J) \omega_1 \omega_3 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = -\omega_0 \omega_1 \quad (2a)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{J - J_3}{J} \omega_3$$

2. Ableiten

$$\begin{array}{l} \dot{\omega}_1 = \omega_0 \dot{\omega}_2 \stackrel{(2a)}{=} -\omega_0^2 \omega_1 \\ \dot{\omega}_2 = -\omega_0 \dot{\omega}_1 \stackrel{(1a)}{=} -\omega_0^2 \omega_2 \end{array}$$

Schwingungsglieder!

Lösung:

$$\omega_1(t) = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \tilde{\tau})$$

$$\omega_2(t) = \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \tilde{\tau})$$

mit $\omega_{\perp}, \tilde{\tau}$ Integrationskonstanten

$$\omega_3(t) = \text{const.}$$

Folgerungen:

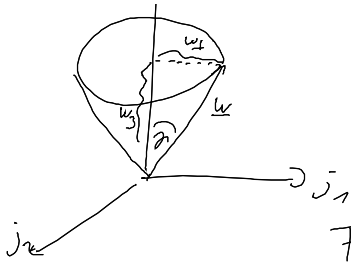
$$\cdot \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{\perp}^2 (\sin^2(\dots) + \cos^2(\dots)) = \omega_{\perp}^2 = \text{const}$$

\cdot Damit ist auch

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{const.}$$

Die Drehachse $\underline{\omega}$ hat konstante Länge und rotiert gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die Hauptträgheitsachse (Figurnachse) \vec{e}_3

\uparrow
 \vec{e}_3



\underline{w} beschreibt also Kreiskant (Polkreis)
 um \bar{j}_3 mit dem Öffnungswinkel
 $\tan \varphi = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3}$

Folgerung für den Drehimpuls \underline{L}_{rel} (im körperfesten System)

$$\underline{L}_{rel} = \underline{J} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \omega_1 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ J_2 \omega_2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ J_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

benutze $J_3 \omega_3 = J_3 \omega_3 + (J_3 - J) \omega_3$

$$\Rightarrow \underline{L}_{rel} = J \underline{w} + (J_3 - J) \omega_3 \bar{j}_3$$

\Rightarrow auch der Drehimpuls rotiert im körperfesten System
 und zwar so, dass $\underline{L}_{rel}, \underline{w}$ und \bar{j}_3 stets in einer Ebene
 liegen.

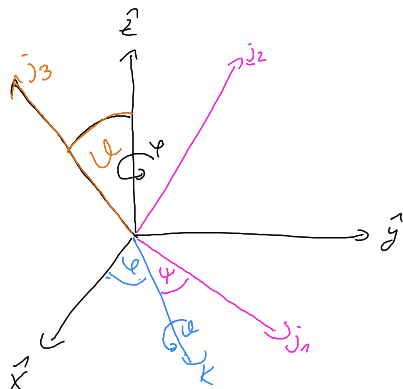
Bewegung im raumfesten System

Hier gilt $\boxed{\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} = 0}$

$\Rightarrow \underline{L}_{rel}$ bildet raumfeste Achse!

Um die Bewegung von \underline{w} und \bar{j}_3 bzgl. der raumfesten Achse \underline{L}_{rel}
 zu beschreiben benötigen wir eine Beschreibung der Drehung des
 körperfesten Systems relativ zum raumfesten System

Exkurs: Euler'sche Winkel



$\varphi = \angle(\bar{x}_1, \bar{k})$
 $\vartheta = \angle(\bar{z}, \bar{j}_3)$

$\Rightarrow \dot{\varphi}$: Drehung um die \bar{x}_3 -Achse
 $\dot{\vartheta}$: Drehung um k

Annahme
 (K) Körperfestes System
 \cong Hauptachsen
 $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3$
 (k) Raumbestes System
 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$

\underline{k} : "Knotenlinie"

Schnittlinie zwischen
 der (x_1, x_2) Ebene
 und der (j_1, j_2) Ebene:

d.h. $\underline{k} \cdot \bar{z} = 0$
 und $\underline{k} \cdot \bar{j}_3 = 0$

ψ : Drehung um \vec{j}_3

Bemerkung: Um K und K' zur Deckung zu bringen sieht man wie folgt vor

i) Drehe um $\underline{\underline{z}}$ mit dem Winkel φ

$$\Rightarrow \underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{k}}$$

ii) Drehe um $\underline{\underline{k}}$ mit Winkel $\alpha \Rightarrow \underline{\underline{z}} = \vec{j}_3$

iii) Drehe um \vec{j}_3 mit Winkel $\psi \Rightarrow \underline{\underline{x}}' = \vec{j}_1$

(Darstellung durch Drehmatrizen

$$\rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}(\psi) \cdot \underline{\underline{R}}(\alpha) \cdot \underline{\underline{R}}(\varphi)$$

\Rightarrow Jede Rotation kann vollständig durch die drei Eulerwinkel ausgedrückt werden