Hamilton-Jacobi-Theorie

suche kanonische Transformation so, dass alle Impulse P_k und alle Koordinaten Q_k zyklisch sind

Forderung: $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$, $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$ $\xrightarrow{\text{kanon. Gleichungen}}$ $\dot{P}_k = 0$, $\dot{Q}_k = 0$

$\Leftrightarrow P_k = \alpha_k = \text{const}$ $\Leftrightarrow Q_k = \beta_k = \text{const}$

Die einfachste transformierte Hamiltonfunktion, die diese Forderung erfüllt, lautet

$$\tilde{H} = 0$$

(dann folgt nämlich trivial $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$)

Wir wissen aus der Theorie der kanon. Transformationen:

$$\tilde{H} = \underbrace{H}_{\text{„alte" Hamiltonfunktion}} + \frac{\partial M}{\partial t}$$

mit M Erzeugende (vier Typen!)

$$\tilde{H} = \boxed{H + \frac{\partial M}{\partial t} = 0}$$

Zweckmäßige Wahl für die Erzeugende:

$$M = M_2(\{q_k\}, \{P_k\}, t) =: S(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$$

„Wirkungsfunktion"

(Name wird später begründet)

Gesucht ist also folgende kanonische Transformation:

$$(\{q_k\}, \{p_k\}) \longrightarrow (\{Q_k\}, \{P_k\})$$

$$H(\{q_k\}, \{p_k\}, t) \longrightarrow \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad , \quad S = S(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$$

mit $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$, $Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$ (s. Kap. II.14)

so dass:

$$\boxed{\tilde{H} = H\left(q_1, \ldots, q_f, \overbrace{\frac{\partial S}{\partial q_1}}^{p_1}, \ldots, \overbrace{\frac{\partial S}{\partial q_f}}^{p_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (HJD)

nichtlineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Wirkungsfunktion S!

da H quadratisch in den p_k und damit auch in $\frac{\partial S}{\partial q_k}$

enthält nur partielle Ableitungen nach den $\{q_k\}$ und nach t !

Das Problem besteht jetzt also im Auffinden von S !

Beachte:
die HJD enthält nur f+1 Variable, nämlich die $\underbrace{\{q_k\}}_{f \text{ Stück}}$ und t !
Die Impulse P_k, die ja in S "stecken" ($S = S(\{q_k\}, \{P_k\}, t)$)
sind nach Voraussetzung zeitlich konstant und sind damit keine Variable mehr!

Lösungsschema für die HJD

a) Formuliere $H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$, setze $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ und stelle die HJD auf

für das konkrete physikalische Problem

b) Löse die HJD für S in den f+1 Variablen $\{q_k\}, t$

$$\Rightarrow S(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t)$$
$$\alpha_1 = P_1 \quad \dots \quad \alpha_f = P_f$$
diese sind alle zeitlich konstant!

c) Aus der Tatsache, dass S Erzeugende ist, folgt

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k = \text{const} \quad \text{nach Voraussetzung}$$

da $S = M_2$

$k = 1, \dots, f$

(es sollten ja alle P_k und Q_k zeitlich konstant sein!)

Das sind f Gleichungen für die $\{q_\kappa\}$!

denn $\frac{\partial S}{\partial \alpha_\kappa}$ hängt ab von $\{q_\kappa\}, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t$ (da $S = S(\{q_\kappa\}, \alpha_1, \dots \alpha_f, t)$)

$$\Longrightarrow q_\kappa = q_\kappa(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t)$$

Auflösung ist möglich, falls die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_\kappa \partial q_l} \neq 0$

d) Impulse:

aus c)

$$p_\kappa = \frac{\partial S}{\partial q_\kappa} = p_\kappa(\{q_\kappa\}, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t)$$

da $S = M_2$

e) Festlegung der Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ und $\beta_1, \dots, \beta_f$

Benutze hierfür die Anfangsbedingungen für $q_\kappa(t=0)$, $p_\kappa(t=0)$

$$q_\kappa(\overset{t=}{0}) = q_\kappa(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, 0)$$

$$p_\kappa(0) = p_\kappa(\alpha_1, \dots, \alpha_f, \beta_1, \dots, \beta_f, 0)$$

$$\Longrightarrow \alpha_\kappa = \alpha_\kappa(\{q_\kappa(0)\}, \{p_\kappa(0)\})$$

$$\beta_\kappa = \beta_\kappa(\{q_\kappa(0)\}, \{p_\kappa(0)\})$$

Setze dies in die in c) und d) hergeleiteten Relationen für q_κ und p_κ ein

$\Longrightarrow$ Mechanisches Problem ist gelöst!

Physikalische Bedeutung von S (Wirkungsfunktion)

Betrachte totale zeitliche Ableitung von S

$$\frac{d}{dt} S(\{q_\kappa\}, \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_f}_{\substack{\text{zeitl. Konstanten} \\ \text{Impulse } P_\kappa}}, t) = \sum_{\kappa=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_\kappa}}_{p_\kappa} \dot{q}_\kappa + \frac{\partial S}{\partial t}$$

also kein Term der Form $\frac{\partial S}{\partial P_\kappa} \dot{P}_\kappa$, da $\dot{P}_\kappa = 0$

$$= \sum_{\kappa=1}^{f} p_\kappa \dot{q}_\kappa + \frac{\partial S}{\partial t}$$

benutze $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \tilde{H} - H$

$$\underset{\nearrow \atop \text{HJD}}{=} 0 - H = -H \quad !$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H = L \quad !$$

Lagrangefunktion

Also ist $S = \underbrace{\int dt\, L}_{\text{Wirkungsintegral}} + \text{const}$

(das haben wir benutzt zur Herleitung der Lagrange-Gl. 2. Art !)

$\Rightarrow$ S heißt „Wirkungsfunktion"

Einfaches Beispiel zur Anwendung der HJD

Freies Teilchen in einer Dimension

a) $H = \frac{p^2}{2m}$, $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ mit $S(q, \overset{=\alpha=\text{const}}{P}, t)$

$$\Rightarrow \text{HJD:} \quad \boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

b) Lösung (erraten !) für S

$$S(q, \alpha, t) = \alpha q - \frac{\alpha^2}{2m} t + c$$

$\alpha = \text{const}$ $(=P)$

$C = \text{const}$

prüfe : $\frac{\partial S}{\partial q} = \alpha \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \alpha^2$

$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\alpha^2}{2m}$

o.k. !

c) Neue Koordinate:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \stackrel{\downarrow}{=} q - \frac{\alpha}{m} t = \beta = \text{const}$$

auflösen nach q

$$\Rightarrow q = q(\alpha, \beta, t) = \beta + \frac{\alpha}{m} t$$

d) (alter) Impuls: $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \alpha = P = \text{const}$

e) Festlegung der Konstanten.

$$q^0 = q(\alpha, \beta, t=0) = \beta$$
$$p^0 = p(\alpha, \beta, t=0) = \alpha$$

einsetzen in die Gl. für q, p

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \frac{p_0}{m} t \\ p(t) &= p_0 \end{aligned}}$$

erwartetes Ergebnis!

<u>Weiteres Beispiel:</u>

Harmonischer Oszillator (in einer Dimension):

a) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \qquad (q = x)$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \text{HJD}: \boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

b) Auffinden der Funktion S

Lösung: Separationsansatz

$$S(q, \underset{\overset{\shortparallel}{P}}{\alpha}, t) = W(q, \alpha) + V(t, \alpha)$$

einsetzen in die HJD

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}_{\text{hängt nur von } q \text{ ab}} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{es wird nur nach } t \text{ abgeleitet}}$$

hängt nur von q ab
es kommen nur Ableitungen von q vor
(und von α)

es wird nur nach t abgeleitet

Es muß gelten: Beide Seiten müssen gleich einer Konstanten γ sein!

Damit das für alle q, t erfüllt ist

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \gamma$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \gamma$$

Weitere Rechnung siehe Übung! Zettel Nr. 9

Allgemeiner Ansatz für die Wirkungsfunktion S, falls die (alte) Hamiltonfunktion zeitunabhängig ist $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$

HJD: $$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ansatz: $$S = (\{q_k\}, \alpha_1, \dots \alpha_f, t)$$
$$= W(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_f)\, t$$

einsetzen in die HJD

$$\Rightarrow \boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E}$$

(Konstante) Gesamtenergie des Systems!

Anwendungen

- Harmonischer Oszillator
- Teilchen im Zentralfeld
- Übergang zur "Wellenmechanik" $\Leftrightarrow$ Übergang in die Quantenmechanik!

III. Mechanik des starren Körpers

Bisher betrachtet:

System von Massenpunkten $i = 1, \ldots, N$, die sich relativ zueinander bewegen können

Jetzt: ausgedehnte starre Körper

III.1. Definition des starren Körpers

A) System von N Massenpunkten (Masse m_i) mit starren Verbindungsvektoren

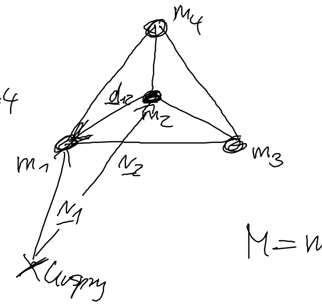
$\underline{r}_i - \underline{r}_j = \underline{d}_{ij}$ (Zwangsbedingungen!)

Gesamtmasse

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

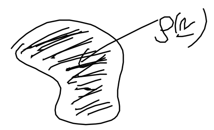
„diskrete Massen"

z.B. $N=4$



$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

B) Körper mit fest vorgegebener, kontinuierlicher ("ausgeschmierter") Massenverteilung $\rho(\underline{r})$



Gesamtmasse: $M = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$

Raumintegral (i.a. dreidimensional!)

Beispiel kugelförmige Verteilung mit Massenschwerpunkt im Ursprung

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \rho = \text{const}, & r < R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

R — Kugelradius

r — Radialabstand vom Ursprung

$\Rightarrow$ Gesamtmasse $\quad M = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$

$$= \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi}\, \rho$$

Auswertung in Kugelkoordinaten

$$= 4\pi \int_0^R dr\, r^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$