

Euler Winkel Zusammenhang mit den Winkelgeschwindigkeiten

Beachte: Rotation bedeutet Änderung der Euler'schen Winkel

$\dot{\varphi}$: Drehung um $\underline{\hat{z}}$

$\dot{\vartheta}$: Drehung um $\underline{\hat{k}}$

$\dot{\psi}$: Drehung um $\underline{\hat{j}}_3$

Zerlege:

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{\hat{z}} + \dot{\vartheta} \underline{\hat{k}} + \dot{\psi} \underline{\hat{j}}_3 \quad \text{drücke nun die Drehachsen durch die Hauptachsen aus}$$

$$= \dot{\varphi} (\sin \vartheta \sin \psi \underline{\hat{j}}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \underline{\hat{j}}_2 + \cos \vartheta \underline{\hat{j}}_3)$$

$$+ \dot{\vartheta} (\cos \psi \underline{\hat{j}}_1 - \sin \psi \underline{\hat{j}}_2) + \dot{\psi} \underline{\hat{j}}_3$$

$$\stackrel{!}{=} \omega_1 \underline{\hat{j}}_1 + \omega_2 \underline{\hat{j}}_2 + \omega_3 \underline{\hat{j}}_3$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{array} \right.$$



\Rightarrow Bewegungsgl. für die Euler'schen Winkel, falls $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bekannt!

Ende Euler'sche Winkel

Zurück zur räumlichen Beschreibung des symmetrischen Kreisel

$$\underline{L}_{\text{rel}}(t) = 0$$

setze o. B. d. A. $\underline{L}_{\text{rel}} = L_{\text{rel}} \underline{\hat{z}}$ \swarrow z - Achse des räumlichen Systems

benutze nun Euler'sche Winkel zur Zerlegung von $\underline{\hat{z}}$ entlang der Hauptachsen

$$\Rightarrow \underline{L}_{\text{rel}} = L_{\text{rel}} \sin \vartheta \sin \psi \underline{\hat{j}}_1 + L_{\text{rel}} \sin \vartheta \cos \psi \underline{\hat{j}}_2$$

Weiterhin wissen wir

$$L_{rel} = \underline{J} \cdot \underline{\omega} = J \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \tilde{\tau}) + J \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \tilde{\tau}) + J_3 \omega_3 \tilde{j}_3$$

* *

Kombiniere $\otimes \otimes$ und $\otimes \otimes \otimes$ mit den BWSL für die Eulerschen Winkel \otimes parallel

$$J \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + J \dot{\theta} \cos \psi = L_{rel} \sin \theta \sin \psi$$

$$J \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - J \dot{\theta} \sin \psi = L_{rel} \sin \theta \cos \psi$$

$$J_3 \dot{\psi} = J_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi}) = L_{rel} \cos \theta$$

nur lösbar mit $\dot{\theta} = 0$, d.h. $\theta = \theta_0 = \text{const}$
 und $\dot{\psi} = \text{const}$
 d.h. unabhängig + separabel

Die BWSL \otimes reduzieren sich dann auf

$$\omega_1 = \omega_{\perp} (\sin(\omega_0 t + \tilde{\tau})) = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \psi$$

$$\omega_2 = \omega_{\perp} (\cos(\omega_0 t + \tilde{\tau})) = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\psi}$$

↑
const

Lösung:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \tilde{\tau} = \frac{J - J_3}{J} \omega_3 t + \tilde{\tau}$$

$$\varphi(t) = \frac{\omega_{\perp}}{\sin \theta_0} t + \varphi_0$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{mit} \quad \tan \theta_0 = \frac{\omega_{\perp} J}{\omega_0 J_3}$$

Vollständige Lösung der BWSL!

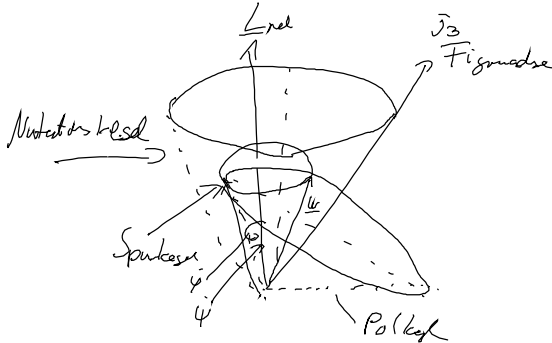
Diskussion (im ramifizierten System)

- $\theta = \theta_0 = \text{const}$ mit $\theta = \angle(\tilde{z}, \tilde{j}_3)$ ↑
Abse des Drehimpuls
 \rightarrow Fignuradse bewegt sich mit konstantem Öffnungswinkel θ_0 und konstanter Winkelgeschw. $\dot{\psi}$ um L_{rel} herum
 \rightarrow "Nutationskegel"
- $\dot{\psi} = \omega_0 = \frac{J - J_3}{J} \omega_3$: Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Körper auf der Polkegel um \tilde{j}_3 dreht (siehe Diskussion im Körperfest System)
- totale Winkelgeschwindigkeit
 $\underline{\omega} = \dot{\psi} \tilde{z} + \dot{\psi} \tilde{j}_3$ liegt immer in einer Ebene mit \tilde{j}_3 und L_{rel}

→ \underline{w} bewegt sich auf der "Spurkegel" um \underline{L}_{rel} .

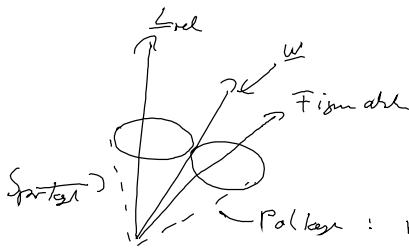
Veranschaulichung:

a) $J < J_3 \rightarrow \underline{\Psi} = \underline{\Psi} J_3$ antiparallel zur Figurachse



Polkegel rollt mit seiner Mantelfläche auf den Mantel des Spurkegels ab.

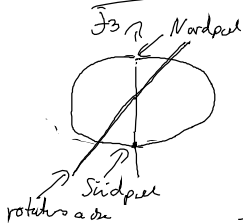
b) $J > J_3 \rightarrow \underline{\Psi}$ parallel zur Figurachse!



Polkegel: rollt mit seiner äußeren Mantelfläche auf den Spurkegel ab.

Beispiel

Die Erde:



abgeplattetes Rotationsellipsoid, das in jeder Näherung symmetrische Kreise.

mit $J_1 = J_2 = J < J_3$

$$\frac{J_3 - J}{J} \approx \frac{1}{300} \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{\omega_3}{300}$$

→ $\underline{w} \neq \underline{j}_3$

→ Bewegung der Rotations- um die Polachse mit Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 300 \frac{2\pi}{\omega_3} \approx 300 \frac{2\pi}{\omega_3} = 300 T_{\text{Tag}}$$

In Wirklichkeit: 427 Tage! und: keine gleichförmige Präzession, in Grunde: Erde kein idealer starrer Körper, sondern etwas elastisch

- kleine Verschiebung der Masse verteilt
(atmosphärische Bewegung) \rightarrow unregelmäßige Präzession.

5.9 Lagrange - Beschreibung des starren Körpers

Zunächst: Lagrangefunktion (im Hauptträgheitsachsensystem)
Sphärische Koordinaten, Euler'scher Winkel!

$$L = T - V \quad \text{mit} \quad T = T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2$$

$$\text{mit} \quad \omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

BWGL im kreisförmigen Fall ($V=0$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} - \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi}$$

$$= \frac{d}{dt} (J_3 \omega_3 \cdot 1) - J_1 \omega_1 (-\dot{\theta} \sin \psi) + \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi - J_2 \omega_2 (-\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi)$$

$$= J_3 \dot{\omega}_3 - J_1 \omega_1 \omega_2 + J_2 \omega_2 \omega_1$$

$$= J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = 0$$

analyse für die
andere Winkel

\rightarrow entspricht die 3. Euler'sche
Satz.

kanonische Impulse

$$\bullet p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T^{\text{rot}}}{\partial \dot{\psi}} = J_3 \omega_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = \overbrace{J_3 \omega_3}^{L_{\text{rot}} \cdot \hat{J}_3} = J_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

Projektion von L_{rot} auf die Körperachse

\hat{J}_3 Achse (Beacht: Symmetrie-Kreis
 $\Rightarrow \omega_3 = \text{const}$)

$\Rightarrow p_\psi$ ist erhalten

$$\bullet p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T^{\text{rot}}}{\partial \dot{\psi}} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}}$$

$$= J_1 \omega_1 \sin \vartheta \sin \psi + J_2 \omega_2 \sin \vartheta \cos \psi + J_3 \omega_3 \cos \vartheta$$

$$\text{benutze } \vec{z} = \sin \vartheta \sin \psi \vec{j}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \vec{j}_2 + \cos \vartheta \vec{j}_3$$

$$\Rightarrow p_\psi = \underline{L}_{\text{rel}} \cdot \underline{\dot{\psi}}$$

Projekt von $\underline{L}_{\text{rel}}$ auf die raumfeste \vec{z} -Richtung!

beachte: p_ψ ist Erhaltungsgröße, falls $U=0$
da dann ψ zyklisch!

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_1 \omega_1 \cos \psi - J_2 \omega_2 \sin \psi \\ = \underline{L}_{\text{rel}} \cdot \underline{\dot{\psi}}$$

\Rightarrow Konstruiere den Hamiltionian via

$$H = \psi p_\psi + \varphi p_\varphi + \theta p_\theta - L$$

Beispiel: Schwere symmetr. Kreisel

Auflagepunkt \neq Schwerpunkt
(0) (S)

Trägheitsmomente bzgl. O:

(benutze Steiner'sche Satz
mit $\underline{a} = l \vec{j}_3$)

$$\tilde{J}_n = J_n + M(a^2 - (\underline{a} \cdot \underline{n})^2)$$

$$\Rightarrow \tilde{J}_3 = J_3 \\ \tilde{J}_1 = \tilde{J}_2 = J + M l^2$$

Trägheitsmomente bzgl. Achse \vec{j}_3

\Rightarrow Lagrange'sche

$$L = T - V = \frac{1}{2} (J + M l^2) (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 - M g l \cos \vartheta \\ = \frac{1}{2} (J + M l^2) (\dot{\vartheta} + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2 - M g l \cos \vartheta$$

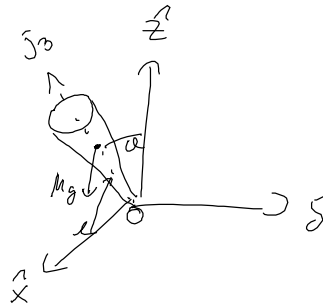
$$\Rightarrow \varphi \text{ und } \psi \text{ sind zyklisch} \Rightarrow p_\psi = J_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = \text{const}$$

$$p_\varphi = \text{const}$$

Aus dem Erhaltungssatz plus der Erhaltung der Gesamtenergie folgt

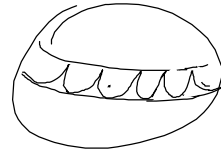
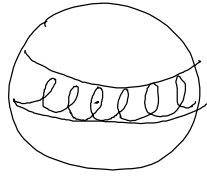
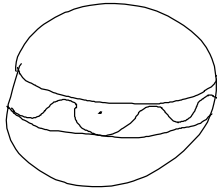
\rightarrow Einzige richtige Variable ist $\vartheta = \vartheta(t)$!

Öffnungswinkel der Figuren relativ zum \underline{L}



Mögliche Beugstegen

Veranschaulichungen der Strahlteilung der Figuren, die mit der Einheitskugel aufgetragen wird.



- Beginn der Werte von α durch die Faraday
Trotz ≥ 0