

Kanonische Transformationen

Motivation:

zyl. Koord. = Lagrang-Funktions: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_H} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_H}$

$\Rightarrow p_H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_H} = \text{const} \Leftrightarrow \dot{p}_H = 0$

Hamilton-Funktion

$\dot{p}_H = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial H}{\partial q_H} = 0$, q_H ist auch hier zyklisch

und $p_H = \text{const} = \alpha_H$
und ist damit keine
erste Koordinate mehr !!

Beispiel: Teilchen im Zentralpotential (ebene Bewegung)

generierte Koord. r, φ (Polarkoordinaten)

$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$
kinetische Energie Zentralpotential

φ ist zyklisch: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const}$

$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$
Radialimpuls

$H = \underbrace{\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}_T + V(r)$

$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = H(r, p_r)$: Reduziere auf
f-1 Freiheitsgrade!

Kanon. Transformationen:

Lösung eines mechan. Problems durch Transf. $q_H \rightarrow Q_H$,
so dass möglichst viele Koord. zyklisch werden!

alle Koord. zykl. $\Rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}(P_1, \dots, P_f, t)$ wobei $P_k = \alpha_k = \text{const}$

Hamilton-BWGL: $\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$ hängt höchstens noch von
der Zeit ab, da ja die
 Q_H nicht mehr vorkommen!

falls speziell $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = 0$
 $\Rightarrow \dot{Q}_k = \text{const}$

$$\Rightarrow Q_k = a_k t + b_k$$

↑
Konstanten

daraus folgen dann
weder die q_k aus Umkehrung
der Transformationsgleichung $\{q_k\} \Leftrightarrow \{Q_k, b\}$

Bedingungen für Kanonische Transformationen

\Leftrightarrow Transformation, die die Hamilton-Gleichung
forminvariant lasse

Erdmellys:
Die Hamilton'sche Gl. folgen aus dem modifizierten Hamilton'sche Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_S$

(mit Variation nach
 q_k, p_k, t)

\Rightarrow Auch für die transformierte Größe $\{Q_k, P_k, \tilde{H}$
muß gelten:

$$\delta \tilde{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - H(Q_k, P_k, t) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{S}}$

Behauptung:

(2) ist erfüllt, wenn

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_{k=1}^f \dot{Q}_k P_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} M_1 \quad (*)$$

mit $M_1 = M_1(q_k, Q_k, t)$

M_1 heißt Erzeugende der Kanon. Transformation

Argumentation in mehreren Schritten

- a) Zeige zunächst, dass die Erzeugende M_1 zusammen mit $\textcircled{*}$ tatsächlich eindeutige Transformationsgleichungen liefert
 $\{q_k, \dot{q}_k\} \rightarrow \{Q_k, \dot{P}_k\}$

$$M_1 = M_1(\{q_k, \dot{q}_k\}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{dM_1}{dt} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Einsetzen in $\textcircled{*}$ und schreiben das Ganze:

$$\sum_{k=1}^f \left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^f \left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k + H - \tilde{H} + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

$$\sum_{k=1}^f \underbrace{\left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \dot{q}_k - \sum_k \underbrace{\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \dot{Q}_k + \underbrace{H - \tilde{H} - \frac{\partial M_1}{\partial t}}_{\stackrel{!}{=} 0} \stackrel{!}{=} 0$$

Da wir hier $\{q_k, \dot{q}_k\}$ und $\{Q_k, \dot{P}_k\}$ als unabhängige Variablen sehen, folgt:

$$i) \quad p_k \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_k}, \quad ii) \quad P_k = - \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}; \quad iii) \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial t}, \quad M_1 = M_1(\{q_k, \dot{q}_k\}, t)$$

Damit ist diese Kanon. Transformation eindeutig bestimmt!

Denn: aus i) folgt durch Umkehrung ein Zusammenhang $Q_k \Leftrightarrow \{q_k, \dot{q}_k\}$
 Einsetzen in ii) \Rightarrow Zusammenhang $P_k \Leftrightarrow \{q_k, \dot{q}_k\}$

Voraussetzung - $\frac{\partial M_1}{\partial q_n \partial Q_n} \neq 0$

b) Mit der Erzeugende $M_1(q_{n1}, \{Q_{n2}, t\})$ führt
 Punkt ② tatsächlich auf drei nichttriviale (kanonische) Hamiltonsche Zwänge!

$$\textcircled{2} \quad 0 \stackrel{!}{=} \underbrace{d \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - H \right)}_{\textcircled{1}} \stackrel{!}{=} \underbrace{d \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H} + \frac{dM_1}{dt} \right)}_{\textcircled{4}}$$

$$\hookrightarrow = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k - \tilde{H} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dM_1(q_{n1}, \{Q_{n2}, t\})}{dt}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^f \dot{Q}_k \delta P_k + \dot{P}_k \delta Q_k - \frac{\delta \tilde{H}}{\delta Q_k} \delta Q_k - \frac{\delta \tilde{H}}{\delta P_k} \delta P_k \right) + \left. \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dM_1}{dt} \right|_{t_1}^{t_2}$$

konnte Taylor bis zu 1. Ordnung!

~~$$+ \sum_{k=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$~~

Anmerkung an der Randzeit!

Null, da $q_k(t_1)$ und $q_k(t_2)$
 Variat Ritz bei der Variation!

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left(\dot{Q}_k \delta P_k + P_k \delta \dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \delta Q_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \delta P_k \right) + \sum_k \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

benutze nun noch -

$$\int_{t_1}^{t_2} P_k \delta \dot{Q}_k = \int_{t_1}^{t_2} P_k \frac{d}{dt} \delta Q_k \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} P_k \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}_k \delta Q_k$$

Einsetzen

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^f \left(\left(\dot{Q}_k - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \right) \delta P_k - \left(\dot{P}_k + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k \right) + \sum_{k=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} + P_k \right)}_{0!} \delta Q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Beachte nun noch, dass Q_k und P_k die neue unabhängige Variablen sind!
 und $\frac{\partial M_1}{\partial P_k} + P_k = 0$ wegen a)

$$\Rightarrow \left[\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \quad \text{und} \quad \dot{P}_k = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \right] \quad \text{Hamilton-Gl. in den neuen Variablen!}$$

Folgerung

gegeben Erzeugende $M_1(q_k, p_k, t)$

aus a) $\tilde{H} = H + \frac{\partial M_1}{\partial \epsilon}$

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \quad , \quad P_k = - \frac{\partial M_1}{\partial Q_k}$$

$\Downarrow Q_k$

Beispiel siehe
später!

Es gibt noch weitere Formeln für die Erzeugende Funktionen

Unterziehe $M_1(q_{ub}, p_{ub}, t)$ einer Legendre-Transformation bzgl. der q_{ub}

$$\begin{aligned}
 & - \mathcal{L} M_1(dq_{ub}, p_{ub}, t) \\
 & = - \left(\sum_{u=1}^f Q_u \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial Q_u}}_{=P_u! \text{ siehe a)}} - M_1(q_{ub}, p_{ub}, t) \right) \\
 & = M_1(q_{ub}, p_{ub}, t) + \sum_{u=1}^f Q_u P_u \\
 & =: M_2(dq_{ub}, p_{ub}, t)
 \end{aligned}$$

Differential von M_2

$$dM_2 = dM_1 + \sum_u dQ_u P_u + \sum_u Q_u dP_u$$

siehe "alt" Diskussion
Übung 3 Lagrange \rightarrow Hamilton

$$\begin{aligned}
 \text{benutze: } \frac{dM_1}{dt} &= \sum_u \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_u} \dot{q}_u + \frac{\partial M_1}{\partial p_u} \dot{p}_u \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t} \\
 &= \underbrace{\tilde{H} - H + \sum_u (p_u \dot{q}_u - \dot{p}_u Q_u)}_{\text{a) i) - ii)}}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow dM_1 = (\tilde{H} - H) dt + \sum_u (p_u dq_u - \dot{p}_u dQ_u)$$

Einsetzen in dM_2

$$\Rightarrow dM_2 = \sum_u (p_u dq_u + Q_u dP_u) + (\tilde{H} - H) dt \quad (*)$$

Folgerungen:

i) Die Variablen von M_2 sind tatsächlich die dq_{ub}, p_{ub}, t !

ii) Durch Vergleich von (*) mit dem "neuen" Differential

$$dM_2(q_n, p_n, t) = \sum_n \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial M_2}{\partial p_n} dp_n \right) + \frac{\partial M_2}{\partial t} dt$$

= (*)

Koeffizientenvergleich

$$p_n \stackrel{!}{=} \frac{\partial M_2}{\partial \dot{q}_n}, \quad Q_n = \frac{\partial M_2}{\partial P_n}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} = \tilde{H} - H$$

liefert explizite Transformationsgleichungen!

Wieder Erzeugend:

- Legendre-Transform von $M_1(q_n, \dot{q}_n, t)$ bezgl. \dot{q}_n

$$M_3(q_n, \{Q_n\}, t) = M_1(\dots) - \sum_n \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_n}}_{p_n} q_n$$

man findet:
(analog ~~zu~~
zu Vorgehensweise bei M_2)

$$q_n = -\frac{\partial M_3}{\partial P_n}, \quad P_n = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_n}, \quad \frac{\partial M_3}{\partial t} = \tilde{H} - H$$

- Legendre-Transform von M_1 bezgl. \dot{q}_n und \dot{Q}_n

$$M_4(q_n, \{P_n\}, \{Q_n\}, t) = M_1(\dots) - \sum_n \left(\underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial \dot{q}_n}}_{p_n} q_n + \underbrace{\frac{\partial M_1}{\partial \dot{Q}_n}}_{P_n} Q_n \right)$$

man findet:

$$q_n = -\frac{\partial M_4}{\partial P_n}, \quad Q_n = \frac{\partial M_4}{\partial P_n}, \quad \frac{\partial M_4}{\partial t} = \tilde{H} - H$$

1. Beispiel für kanonische Transformation:

Wähle als Erzeugende $M_2(q_n, \{P_n\}, t) = -\sum_{k=1}^f q_k P_k$

$$p_n = \frac{\partial M_2}{\partial \dot{q}_n} = -P_n, \quad P_k = -\frac{\partial M_2}{\partial Q_k} = q_k$$

also $\{q_i, p_j\} \rightarrow \{P_i, Q_j\}$ also Vertauschung von Orten
und Impulsen!

Diese Vertauschung hätte man auch machen können
mit $M_f(q_i, p_j, t) = - \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k$