neue Notation:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}, \quad \underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ \hline -\underline{\underline{1}} & 0 \end{array} \right)$$ — f×f Blockmatrix

2f Komponenten!

x_α, $\alpha = 1, \dots, 2f$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$$

Kanon. Transformation:

$$\underline{x} \to \underline{y} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$$

falls Hamilton-Gl. forminvariant!

$$\left(\underline{\underline{M}}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$$

$$\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$$

Hinter $\underline{\underline{M}}$ ~~hierin daher~~ "versteckt sich" die Jacobi-Matrix der kanonischen Transformation! (≙ Matrix der 2. Ableitungen)

Erinnerung:
z.B. Erzeugende $M_1 = M_1(\{q_k\}, \{Q_k\}, t)$

$$p_m = \frac{\partial M_1}{\partial q_m}, \quad P_m = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_m}$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial Q_k} \neq 0! \Leftrightarrow \frac{\partial p_m}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_k \partial q_k} \neq 0$$

$$= -\frac{\partial P_k}{\partial q_m}$$

es gilt:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$$

Die Matrix $\underline{\underline{J}}$ stellt eine „Metrik" im 2f-dimensionalen Phasenraum dar (≙ $\underline{\underline{J}}$ ist ein metrischer Tensor), welche invariant unter kanon. Transformation (ausgedrückt durch die Matrix $\underline{\underline{M}}$) ist!

Bemerkungen dazu:

- Zur Rolle von $\underline{\underline{J}}$ als metrischer Tensor:

Über dem 2f-dimensionalen Phasenraum $\mathbb{R}^{2f}$ ist ein verallgemeinertes Skalarprodukt, hier speziell eine schiefsymmetrische Bilinearform definiert:

$$\boxed{\left(\underline{x}, \underline{y}\right) := \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{y} = \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} x_\alpha J_{\alpha\beta} y_\beta} \quad (*)$$

Vergleiche mit dem bekannten (euklidischen) Skalarprodukt

$$\underbrace{(\underline{x},\underline{y})_{\text{Eukl.}}}_{\text{M-dim. Vektor}} := \sum_{i=1}^{M} x_i y_i = \underline{x}^T \underline{\underline{g}}\, \underline{y} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\underline{\underline{g}}}_{\text{Metrischer Tensor im Euklidischen Raum}} = \underline{\underline{1}}$$

Zurück zu (*):

Dieses verallg. Skalarprodukt ist „schiefsymmetrisch", denn:

$$(\underline{y},\underline{x}) \overset{(*)}{=} \underline{y}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{x} = $$

$$= \left(\underline{x}^T \underline{\underline{J}}^T \underline{y}\right)^T \qquad \underline{y}^T\left(\underline{x}^T \underline{\underline{J}}^T\right)^T = \underline{y}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{x}$$

$$= -\underbrace{\left(\underline{x}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{y}\right)}^T \qquad \text{benutze } \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$$

$$\overset{(*)}{=} -\underbrace{(\underline{x},\underline{y})}_{\text{Skalar}}^T = -(\underline{x},\underline{y})$$

Es kommt also hier auf die Reihenfolge an!

(anders als beim ~~...~~ Euklid. Skalarprodukt!)

„Bilinear", denn:

$$(\underline{x}, \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2) = \lambda_1 (\underline{x},\underline{y}_1) + \lambda_2 (\underline{x},\underline{y}_2)$$

- Rolle der kanon. Transformation in diesem Skalarprodukt

$$(\underline{x}',\underline{y}') = (\underbrace{\underline{\underline{M}}\,\underline{x}}_{\underline{x}'}, \underbrace{\underline{\underline{M}}\,\underline{y}}_{\underline{y}'}) \overset{\text{Def. }(*)}{=} \underline{x}'^T \underline{\underline{J}}\, \underline{y}'$$

benutze Def. von $\underline{x}', \underline{y}'$

$$= \underline{x}^T \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}}\, \underline{y}$$

benutze $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}}$.

$$= \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{y} = (\underline{x},\underline{y}) \quad !!$$

Auch sieht man, dass die kanon. Transformation die Struktur des Phasenraums ~~..~~ invariant lassen!

Man sagt:

Die Menge der Matrizen $\underline{\underline{M}}$ mit der Eigenschaft $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$ bilden eine Gruppe, nämlich die reelle symplektische Gruppe S über $\mathbb{R}^{2f}$.

Die Gruppe ist über die oben diskutierte schief symmetr. Bilinearform charakterisiert

Fazit: Die Invarianz der Kanon. Gleichungen $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ unter kanonischen Transformationen entspricht einer symplektischen Struktur des Phasenraums

(genauere Diskussion: Buch von Scheck)

II.16 Poisson-Klammern

Ausgangspunkt:

Jede mechanische "Observable" ($\hat{=}$ physikalische Größe wie z.B. Energie, (Dreh-)Impuls) lässt sich im Hamiltonformalismus als „Phasenfunktion" $g(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$ darstellen.

Bsp.: Konservatives, skleronomes: $\underset{\text{Energie}}{E} = H(\{q_k\}, \{p_k\})$

Betrachte nun die Zeitentwicklung einer solchen Observablen:

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial g}{\partial t}$$

totale Zeit-Ableitung

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

benutze Hamilton'sche Gl.

$$=: \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Definition:

Für zwei beliebige skalare Observablen $f(\{q_k\},\{p_k\},t)$ und $g(\{q_k\},\{p_k\},t)$ heißt

$$\boxed{\{f,g\} := \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right)}$$

die Poisson-Klammer von f mit g

Bemerkung: (zur Def.)

Obige Definition ist konsistent mit der in den Büchern von Nolting und Goldstein, während bei Scheck die Terme auf der rechten Seite vertauscht sind ($\Rightarrow$ anderes Vorzeichen!)

Eigenschaften der Poissonklammern

i) Rolle bei der Zeitentwicklung: $\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$

$\Rightarrow$ für nicht explizit zeitabhängige Observable (d.h. $\frac{\partial g}{\partial t}=0$) folgt also:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}$$

speziell gilt für Erhaltungsgrößen $\left(\frac{dg}{dt}=0\right)$

$$\{g, H\} = 0$$

ii) Spezialfälle von i):

a) $g = q_k$ offensichtlich nicht explizit zeitabhängig! $\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}=0\right)$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k \overset{i)}{=} \{q_k, H\}$$

$$= \sum_{m=1}^{f} \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_m}}_{0} \frac{\partial H}{\partial q_m}} \right)$$

benutze Def. der Poissonklammer

$$= \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Kanonische Gleichungen!

b) $g = p_k$: $\frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k \overset{i)}{=} \ldots = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

iii) „Fundamentale Poisson-Klammern"

$\{q_k, q_l\} = 0$ hier ohne Beweis

$\{p_k, p_l\} = 0$

benutze Def. der Poissonklammer

$$\{q_k, p_l\} = \sum_m \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_m}}_{\delta_{km}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_m}}_{\delta_{lm} = \delta_{ml}} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_m}}_{0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_m}}_{0}} \right)$$

$$= \sum_m \delta_{km} \delta_{ml} = \delta_{kl}$$

Achtung: es kommt auf die Reihenfolge an!

$$\{p_k, q_l\} = \ldots = -\delta_{kl}$$

iv) Poissonklammern sind schiefsymmetrische Bilinearformen, sie entsprechen also wieder einem verallgemeinerten („symplektischen") Skalarprodukt im Phasenraum!

$$\{f,g\} = \sum_{m=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial g}{\partial p_m} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial g}{\partial q_m}\right)$$

$$= \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial q_f}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_f}\right)}^{\text{Zeilenvektor (2f-dim)}}}_{(\underline{f}_x)^T} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & 0 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{J}}}}_{2f \times 2f \text{ Matrix}} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial q_f} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}}^{\text{Spaltenvektor (2f-dim)}}}_{\underline{g}_x}$$

(Notation analog zum früher eingeführten Vektor $\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix}$)

Um zu sehen, dass das stimmt, beachte ~~dass~~:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \end{pmatrix}}_{\underline{g}_x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial g}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

Def. des verallg. Skalarprodukts aus II.15

Also: $\boxed{\{f,g\} = \underline{f}_x^T \underline{\underline{J}}\, \underline{g}_x = (\underline{f}_x, \underline{g}_x)}$

ausgeschrieben: $\boxed{\{f,g\} = \sum_{\alpha=1}^{2f}\sum_{\beta=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} J_{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial x_\beta}}$ (*)

Mit der Interpretation der Poissonklammer als symplektisches Skalarprodukt kann man die Ergebnisse aus ii) und iii) auch noch kompakter schreiben:

ii) $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$, $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$, $k = 1, \dots, f$

$$\dot{x}_\gamma = \{x_\gamma, H\} \overset{*}{=} \sum_{\alpha=1}^{2f} \sum_{\beta=1}^{2f} \underbrace{\frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\alpha}}_{\delta_{\gamma\alpha}} J_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} = \sum_{\beta=1}^{2f} J_{\gamma\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}$$

$\gamma = 1, \dots, 2f$

$$= \left(\underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x \right)_\gamma$$

entspricht unserem früheren Ergebnis $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$

Zeige nun noch:

Die Poisson-Klammer ist invariant unter kanonischen Transformationen!