Gesamt-Drehimpuls

$$\underline{L}(t) = \sum_{i=1}^{N} \underline{l}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{r}_i \times \underline{p}_i\right) \qquad , \ \underline{p}_i = m_i \dot{\underline{r}}_i$$

$$\dot{\underline{L}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \big(\underbrace{\dot{\underline{r}}_i \times \underline{p}_i}_{0} + \underline{r}_i \times \dot{\underline{p}}_i\big) = \sum_{i=1}^{N} \big(\underline{r}_i \times \underbrace{\dot{\underline{p}}_i}_{\underline{F}_i}\big) = \underline{N}$$

Gesamt-Drehmoment

mit

$$\underline{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i^{extern}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \left(\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{extern}\right)$$

betrachte z.B. $i=1, j=2$ bzw $i=2, j=1$

$$\underline{r}_1 \times \underline{F}_{12} + \underline{r}_2 \times \underline{F}_{21} = \left(\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right) \times \underline{F}_{12}$$

3. Newton'sches Axiom $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$

Nehm nun an, dass $\underline{F}_{ij}$ Zentralkraft

d.h. $\underline{F}_{ij} = f(\underbrace{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}_{r_{ij}})\, \hat{\underline{r}}_{ij}$ mit $\hat{\underline{r}}_{ij} = \dfrac{\underline{r}_{ij}}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$

$$\Rightarrow \left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) \times \underline{F}_{ij} = \left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) \times f(r_{ij}) \frac{\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right)}{r_{ij}}$$

$$= 0 \quad !$$

Für die Zeitableitung des Drehimpulses gilt dann:

$$\ddot{\underline{L}}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\left(\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}\right)}_{\text{Null für Zentralkraft}} + \sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{ext}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{\text{extern}}\right) = \underline{N}^{\text{extern}}$$

Also:

In Abwesenheit äußerer Kräfte ($\underline{F}_i^{\text{extern}} = 0$) und mit Zentralkräften gilt $\dot{\underline{L}}(t) = 0$,

der Gesamtdrehimpuls bleibt also erhalten

c) Energie

Betrachte System mit konservativen Kräften

$$\underline{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\left(-\nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j)\right) - \nabla_i V^{\text{ext}}(\underline{r}_i) \quad (*) \quad , V \text{ skalare Potential}$$

$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$ Newton'sche BWGL

Multipliziere diese Gleichung mit $\dot{\underline{r}}_i$ und summiere über alle $i = 1, \dots, N$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \underline{F}_i \overset{(*)}{=} -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \dot{\underline{r}}_i \cdot \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \nabla_i V^{\text{ext}}(\underline{r}_i)$$

Ziel:

Umschreiben aller Terme als Zeitableitung

Linke Seite: benutze $\frac{d}{dt}\left(\dot{\underline{r}}^2\right) = 2\dot{\underline{r}}_i \ddot{\underline{r}}_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\underline{r}}_i\right)^2$$

Rechte Seite:

externer Anteil:

benutze: $\frac{d}{dt} V^{\text{extern}}(\underline{r}_i(t)) = \nabla_i V^{\text{ext}} \cdot \dot{\underline{r}}_i$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \cdot \nabla_i V^{\text{ext}}(\underline{r}_i) = \frac{d}{dt}\left(-\sum_{i=1}^{N} V^{\text{ext}}(\underline{r}_i)\right)$$

Zweikörper-Term

benutze: $\frac{d}{dt} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = \frac{d}{dt} V(\underline{r}_{ij})$ mit $\underline{r}_{ij} = \underline{r}_i - \underline{r}_j$

$$= \nabla_{ij} V(\underline{r}_{ij}) \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$ mit $\nabla_{ij} =$ "$\frac{d}{d\underline{r}_{ij}}$"

$$= \nabla_i V(\underline{r}_{ij}) \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$ da $\underline{r}_{ij} = 1 \cdot \underline{r}_i - \underline{r}_j$

$$= -\underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_{ij}$$

betrachte $i,j = 1,2$

$$\underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{r}}_{12} + \underline{F}_{21} \cdot \dot{\underline{r}}_{21} = \underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{r}}_{12} - \underline{F}_{12} \cdot \dot{\underline{r}}_{21}$$ (actio gegengleich reactio)

$$= \underline{F}_{12} \cdot (\dot{\underline{r}}_{12} - \dot{\underline{r}}_{21})$$

$\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$
$\underline{r}_{21} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$

$$= 2 \underline{F}_{12} \dot{\underline{r}}_1 - 2 \underline{F}_{12} \dot{\underline{r}}_2$$

$$= 2 \underline{F}_{12} \dot{\underline{r}}_1 + 2 \underline{F}_{21} \dot{\underline{r}}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) = -2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_i = 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \dot{\underline{r}}_i$$

Insgesamt folgt aus

$$\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = -\sum_i \sum_{j \neq i} \dot{\underline{r}}_i \nabla_i V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \sum_i \dot{\underline{r}}_i \nabla_i V^{extern}(\underline{r}_i)$$

also:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) - \sum_{i=1}^{N} V^{extern}(\underline{r}_i) \right) \quad (**)$$

identifiziere:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} = T$$ Gesamte kinetische Energie des Systems (im nicht-relativistischen Fall)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} V(\underline{r}_i - \underline{r}_j) + \sum_i V^{ext}(\underline{r}_i) = V$$ Gesamte potentielle Energie

Damit folgt aus (**)

$$\boxed{\frac{d}{dt} T = -\frac{d}{dt} V} \iff \boxed{\frac{d}{dt} E = 0}$$

wobei $E = T + V$ Gesamtenergie

Die Gesamtenergie bleibt in einem konservativen System erhalten !!

Betrachte den Spezialfall eines Systems ohne insgesamt äußere Kräfte („abgeschlossenes System") (d.h. $\underline{F}_i^{extern} = 0$) und mit konservativen weiteren Kräften

$$\Rightarrow \dot{\underline{P}}(t) = 0 \qquad (\text{und } \underline{P} = M\dot{\underline{R}})$$ Erhaltung des Gesamtimpulses $\underline{P} = \text{const}$

$$\iff \underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \dot{\underline{R}} \cdot t$$

Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig

$$\dot{\underline{L}}(t) = 0$$ Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

Annahme: Zentralkraft

$$E = T + V = \text{const}$$ Erhaltung der Gesamtenergie

Beachte: $\underline{P}, \underline{R}, \underline{L}$ sind i.A. dreidimensionale Vektoren

$\Rightarrow$ obige Gleichungen involvieren 10 Größen !!

Erhaltene Größen: $P_x, P_y, P_z, L_x, L_y, L_z, E$ „Integrale der Bewegung"

$\Rightarrow$ Diese lassen sich benutzen, um Bewegungsgleichungen zu vereinfachen!

I.5. Zweikörperproblem mit Zentralkraft

Betrachte zwei Körper der Masse m_1 und m_2

und Kraft $\underline{F}_{12} = f(r_{12})\,\hat{\underline{r}}_{12}$ mit $r_{12} = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|$

Zentralkraft $\qquad \hat{\underline{r}}_{12} = \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}}$

Annahme: Keine äußeren Kräfte: $\underline{F}_i^{extern} = 0$

a) Reduzierung auf effektives Einteilchenproblem

Newton'sche BWGL:
$$\boxed{\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12} \end{aligned}}$$

6 gekoppelte Diff. gleichungen
$\Rightarrow$ benötige 12 Anfangsbedingungen!
(Komponente von $\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i$, $i=1,2$)

(da $F_i^{ext}=0$)

Benutze Impulserhaltung (von $\underline{P}$)

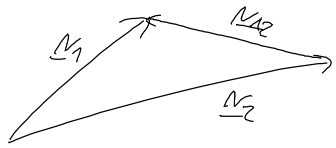
$$\Rightarrow \underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \dot{\underline{R}} \cdot t \qquad \text{Schwerpunktssatz}$$

mit $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M}$ mit $M = m_1 + m_2$

$\Rightarrow \underline{R}(t)$ bestimmbar, falls $\underline{R}(0)$ und $\underline{P}$ (= const) bekannt ... !
(Schwerpunktbewegung ist trivial ...!)

Die eigentliche Dynamik steckt also in der Relativbewegung!

Führe ein:
Relativvektor: $\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$



Wie lautet die zugehörige BWGL?

$$\ddot{\underline{r}}_{12} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 \underset{\text{BWGL}}{=} \frac{1}{m_1}\underline{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\underline{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\underline{F}_{12}$$

Führe ein: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ „reduzierte Masse"

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} = \frac{M}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}}_{12} = \frac{1}{\mu}\underline{F}_{12} \Longrightarrow \boxed{\mu\,\ddot{\underline{r}}_{12} = \underline{F}_{12}}$$

$$\text{mit } \underline{F}_{12} = -\nabla_1 V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = -\nabla_{12} V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

In diese neue BWGL geht nur noch die Relativkoordinate ein

$\Rightarrow$ Reduzierung auf ein effektives Einteilchenproblem,
nämlich die Bewegung der Masse μ bei $\underline{r}_1$ um Zentrum bei $\underline{r}_2$

Die Schwerpunktbewegung wurde „abgetrennt" !

b) Einteilchenproblem

($\underline{F}_{12}$ ist Zentralkraft!)

Wir suchen zunächst (zusätzlich zum Gesamtimpuls) eine weitere Erhaltungsgröße

betrachte Gesamt-Drehimpuls

$$\underline{L} = \underline{r}_1 \times m_1 \dot{\underline{r}}_1 + \underline{r}_2 \times m_2 \dot{\underline{r}}_2$$

wir wissen bereits: $\underline{F}_{12}$ Zentralkraft, $\underline{F}_i^{extern} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}} = 0$$

Umschreiben von $\underline{L}$ mit Hilfe der Vektoren $\underline{R} = \frac{m_1}{M}\underline{r}_1 + \frac{m_2}{M}\underline{r}_2$

und $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ und $\underline{r}_{12} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

Man findet (siehe 2. Übungsblatt)

$$\underline{L} = \dots = M\,\underline{R} \times \dot{\underline{R}} + \mu\,\underline{r}_{12} \times \dot{\underline{r}}_{12}$$

Entkopplung in zwei Beiträge

$$\underline{L}_S = M \underline{R} \times \dot{\underline{R}} \quad \text{Schwerpunkts-Drehimpuls}$$

$$\underline{L}_{rel} = \mu \underline{r}_{12} \times \dot{\underline{r}}_{12} \quad \text{Relativ-Drehimpuls}$$

also hier ebenfalls „Abtrennung" der Schwerpunktsbewegung!

$$\Rightarrow \underline{L} = \underline{L}_S + \underline{L}_{rel}$$

es gilt: $\dot{\underline{L}} = 0$

und $\dot{\underline{L}}_S = \underbrace{M \dot{\underline{R}} \times \dot{\underline{R}}}_{\text{Null}} + \underbrace{M \underline{R} \times \underbrace{\ddot{\underline{R}}}_{\text{Null, da } \underline{P} = \text{const}}}_{\text{Null}}$ (Produktregel)

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}}_S = 0$$

Also gilt auch $\boxed{\dot{\underline{L}}_{rel} = 0}$

Auch der Relativ-Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße!

Folgerung für die Dynamik:

Erinnerung: $\underline{L}_{rel} = \mu \underline{r}_{12} \times \dot{\underline{r}}_{12}$

Vektorprodukt! $\underline{L}_{rel} \perp \underline{r}_{12}$

und $\underline{L}_{rel} \perp \dot{\underline{r}}_{12}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{L}_{rel} \cdot \underline{r}_{12} = 0 \\ \underline{L}_{rel} \cdot \dot{\underline{r}}_{12} = 0 \end{array}\right\} \text{ für alle Zeiten } t$$

Außerdem $\dot{\underline{L}}_{rel} = 0 \Leftrightarrow \underline{L}_{rel}$ ist zeitlich konstanter Vektor!!

<u>Folgerung:</u> Die Bewegung von $\underline{r}_{12}$ verläuft zu allen Zeiten t in einer festen, durch $\underline{r}_{12}$ und $\dot{\underline{r}}_{12}$ bestimmten Ebene <u>senkrecht</u> zu $\underline{L}_{rel}$!!

Lege nun fest:

$\underline{L}_{rel} \parallel z$-Achse

d.h. $\underline{L}_{rel} = (0, 0, L_{rel})$

$\Rightarrow$ Bewegung erfolgt ausschließlich in der x-y-Ebene !!

$$\underline{r}_{12}(t) = (x(t), y(t), 0)$$
$$\dot{\underline{r}}_{12}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$$

Wir benötigen also nur noch <u>zwei</u> Koordinaten !

Beschreibe die resultierende Dynamik in Polarkoordinaten

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$$
$$y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)$$
$$\dot{y}(t) = \dot{r}(t)\sin\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)$$