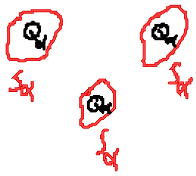
1.6.2. Randwertaufgabe: 2. Grundaufgabe

Erinnerung: 1. Grundaufgabe [geg.: ϕ_α auf Leiteroberfläche
ges.: $\phi(r)$, Q_α]

Jetzt: geg: Leiter L_α (Oberfläche S_α) $\alpha = 1, \dots, n$
mit Ladung Q_α
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Außenraum

ges: $\phi(r)$, ϕ_α



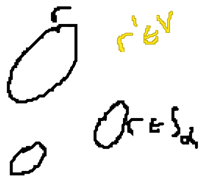
Lösung: Zurückführen auf Grundaufgabe 1 durch Zusammenhang zwischen ϕ_α und Q_α

Es gilt:
$$\boxed{Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\, \phi_\beta}$$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis:
$$Q_\alpha = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla \phi(\underline{r})$$

$$\overset{\text{Lösung } \phi}{=} -\varepsilon_0 \oint d\underline{f} \cdot \nabla_r \left[\int d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\, \rho(r') \right]$$



$$-\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_r \left[\sum_{\beta}^{n} \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r}-\underline{r}')\right]$$

$$= -\varepsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3r \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r\, G(r-r')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')=0} \rho(r') \qquad \underline{r}\in L_\alpha,\ \underline{r}'\in V$$

$$-\sum_{\beta=1}^{n} \phi_\beta \underbrace{\varepsilon_0^2 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\nabla_r \oint_{S_\beta} d\underline{f}'\cdot\nabla_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{=:C_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} C_{\alpha\beta}\,\phi_\beta$$

Aus der Symmetrie $G(\underline{r}-\underline{r}') = G(\underline{r}'-\underline{r})$

[aus Green'schen Formel $\psi = G(\underline{r}-\underline{r}')$, $\varphi = G(\underline{r}'-\underline{r})$]

folgt $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

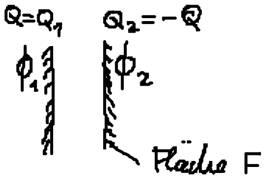
Einheit: $1\,F = 1\,\frac{C}{V} = 1$ Farad (M. Faraday 1791 – 1867)

Betrachte speziell einen Leiter mit ϕ_L

$$C = \frac{Q}{\phi_L}$$ Kapazität eines Leiters

[rein geometrische Größe]

Plattenkondensator



$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$$
$$Q_2 = C_{21}\phi_2 + C_{22}\phi_1$$

[$C_{12} = C_{21} \equiv C'$

[$C_{11} = C_{22} \equiv C$

Spezialfall $Q_1 + Q_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} Q &= C\phi_1 + C'\phi_2 \\ -Q &= C'\phi_1 + C\phi_2 \end{aligned}$$

$$0 = (C+C')(\phi_1+\phi_2) \Rightarrow C = -C'$$

[$C_{\alpha\beta}$ ist pos. definit
nicht singulär]

$$\underline{\underline{C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}}}$$

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} C^{-1}_{\alpha\beta} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe liefert $\phi(\underline{r})$ für gegebenes Q_β, $\rho(r)$.

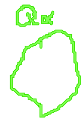
Damit ist die 2. Grundaufgabe gelöst, falls $G(\underline{r}-\underline{r}')$ gefunden / konstruiert wurde.

[Webseite zur Veranschaulichung
www.falstad.com]

1.6.3. Feldenergie im Bereich mit Leitern

Energie des Feldes im Außenraum ($\text{für } \rho(\underline{r}) = 0$)

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \left(\underline{E}(\underline{r}) \right)^2$$



Betrachte differentielle Änderungen der Randbed. auf den L_γ $\Rightarrow$

differentielle Änderung

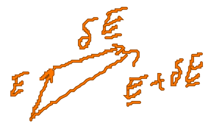
$Q_\alpha \to Q_\alpha + \delta Q_\alpha$

$\phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta \phi_\alpha$

Lösung $\phi(\underline{r}) \to \phi(\underline{r}) + \delta \phi(\underline{r})$

Räumliche Anordnung ist ungeändert $\Rightarrow$ Vertauschung von ∇ und δ

$$\left[\begin{array}{lll} \Delta \phi(\underline{r}) = 0 & \Rightarrow & \Delta \delta \phi(r) = 0 \quad \text{in } V \\ \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \phi(r) & \Rightarrow & \delta \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \delta \phi(r) \end{array} \right]$$



$$\Rightarrow \delta W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \; 2\underline{E}(r) \, \delta \underline{E}(\underline{r})$$

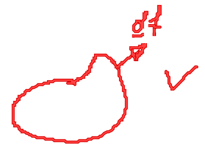
$$= -\varepsilon_0 \int_V d^3r \; \underbrace{\nabla \phi(r) \; \delta \underline{E}(r)}_{\nabla \cdot (\phi \delta \underline{E}) - \phi \underline{\nabla} \cdot \delta \underline{E}}$$

$$\delta W = -\varepsilon_0 \int_V d^3r \; \nabla \cdot (\phi \, \delta \underline{E})$$

$$\left[\underline{\nabla} \, \delta \underline{E} = \delta \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{E}}_{0} = 0 \right.$$

in V da $\rho = 0$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \varepsilon_0 \sum_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \left(\phi(\underline{r})\, \delta \underline{E}(r)\right)$$



Vorzeichen-wechsel

$$\overset{\phi(\underline{r})|_{S_\alpha}=\phi_\alpha}{=} \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\, \delta\underline{E}$$

$$= \sum_\alpha \phi_\alpha\, \delta Q_\alpha \qquad Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\phi_\beta$$

$$= \underbrace{\sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta}\, \delta\phi_\beta} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

"Trick"

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\, \delta\phi_\beta} + \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \underbrace{C_{\beta\alpha}}_{C_{\alpha\beta}} \phi_\beta\, \delta\phi_\alpha}^{\alpha\to\beta,\ \beta\to\alpha}$$

$$\delta W = \delta\left\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta} \qquad \text{Feldenergie}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1. Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen $\longrightarrow$ elektrischer Strom I

Experimentelle Erfahrung: $\quad Q(t) = \int_V d^3r\, \rho(r,t)$

globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V}\delta I$$

$$\delta I = \frac{\rho\, dV}{dt} = \frac{\rho\,\overbrace{|v|\,dt}^{ds}\,|d\underline{f}|\cos\alpha}{dt} = \underbrace{\rho\,\underline{v}}_{\underline{j}(\underline{r},t)}\,d\underline{f}$$

(Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeit aus V herausströmt)

Elektrische Stromdichte $\quad \underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$

lokale Größe

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V}\overbrace{d\underline{f}\cdot\underline{j}}^{\delta I} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\,\operatorname{div}\underline{j} \qquad \text{für alle } V$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung

lokale Erhaltungsgröße

speziell: stationäre Ladungsverteilung

$\operatorname{div}\underline{j} = 0 \quad$ (nicht notwendig $\underline{j} = 0$)