

Elektrodynamik in Materie

... was bisher geschah:

$$(1) \quad \nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

$$(4) \quad \nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j}$$

$$(5) \quad \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$(6) \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$$

+ Materialgleichungen (Zusammenhang $\underline{P} \leftrightarrow \underline{E}$
 $\underline{M} \leftrightarrow \underline{B}$)

Lineare Optik $\underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E}$

Nichtlineare Optik $\underline{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \underline{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta$
 $+ \epsilon_0 \chi^{(3)} \underline{E}_\alpha \underline{E}_\beta \underline{E}_\gamma + \dots$

• $\chi^{(2)}$ verschwindet in verlustfreien Kristallen mit Inversionssymmetrie

$$\left[\begin{array}{l} \chi^{(1)} \sim 1 \\ \chi^{(2)} \sim 10^{-10} \text{ am/V} \\ \chi^{(3)} \sim 10^{-17} \text{ cm}^2/\text{V}^2 \end{array} \right] \text{ in Festkörpern}$$

Beispiele: $\chi^{(2)}$: Frequenzverdopplung
3-Wellen mischer

$\chi^{(3)}$: 4-Wellen mischer

Wellenausbreitung ohne Dispersion

Wellengleichung
$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \left(\ddot{\vec{E}} + \frac{1}{\tau} \dot{\vec{E}} \right) = 0$$

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma}$$

$$\rightarrow k^2 = \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right) \quad k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$$

Dispersionsrelation

kompl. Brechungsindex $\tilde{n} = n + i\eta$

Beispiel: Isolator ($\sigma = 0$)

$$\rightarrow \eta = 0$$

reeller Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} > 1$

Phasengeschwindigkeit $\frac{c}{n} < c$

Metall (σ groß) $\tau \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma} \ll \frac{1}{\omega}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \eta^2 + 2i n \eta)$$

$$\approx \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r \frac{i}{\omega \tau}$$

(für alle Frequenzen bis UV)

$$n^2 - \gamma^2 \approx 0 \quad n\gamma \approx n^2 \approx \gamma^2 \approx \frac{\epsilon_r \mu_r}{2\omega\sigma} \quad \rightarrow \quad n = \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{2\omega\sigma}}$$

Extinktionskoeffizient $d = \frac{c}{\omega\gamma} \sim \text{cm}$ für 100Hz

hochfrequente Wellen dringen nicht tief ins Metall ein.

Grund: Verschiebungsstrom \ll Leitungsstrom

5.6.2. Wellenausbreitung mit Dispersion [Annahme: $n=1$]

Betrachte zeitliche Dispersion d.h. $\hat{\chi}(\omega)$

$$\hat{P}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \underline{E}(\omega)$$

$$\text{mit } \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t} \quad (\text{dynamische Suszeptibilität})$$

$$\text{Fourier-Transform: } P(\underline{r}, t) = \frac{1}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{P}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{E}(\underline{r}, t) e^{i\omega t}$$

$$P(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'-t)} \underline{E}(\underline{r}, t')$$

$$= \frac{\epsilon_0}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t-t') \underline{E}(\underline{r}, t') \quad (\text{Faltungsintegral})$$

NB: Kausalität
 verlangt $\chi(t-t')=0$
 für $t' > t$

aus mikroskopischen Modellen
 folgt i.a. ein komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$ (z.B. Lorentzkurve)

→ komplexe dielektrische Funktion

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad \text{mit} \\ \epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$$

Aus $\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \chi(t) e^{i\omega t}$ folgt

$$\epsilon_r^*(\omega) = \epsilon_r(-\omega)$$

$$\rightarrow \epsilon'(\omega) = \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) = -\epsilon''(-\omega)$$

monochromatische ebene Welle $\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$

$$\Rightarrow k^2 = \epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega^2}\right)$$

Isolator : ($\sigma=0$) $\rightarrow k^2 = \epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\bar{n}(\omega)^2 = \epsilon_r(\omega) = \epsilon' + i\epsilon'' \quad \text{komplexer} \\ \text{Brechungsindex!}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \epsilon'(\omega) = n^2 - \mu^2 \\ \epsilon''(\omega) = 2n\mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu = \\ n = \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}$$

Absorptionskoeffizient μ
 reeller Brechungsindex n

(i) Absorption

a) $\epsilon'' = 0 \rightarrow \mu = 0$
 $n = \sqrt{\epsilon'}$

ungeclämpfte Welle falls
 $\epsilon' > 0$

b) $\epsilon'' > 0 \rightarrow \mu > 0$

gedämpfte Welle
 Energiedissipation

(ii) Dispersion

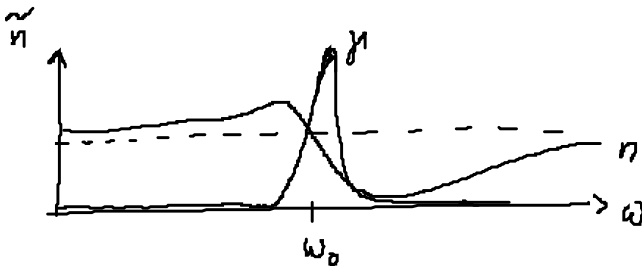
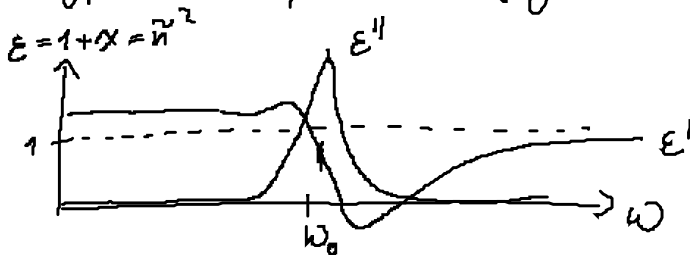
$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = n(\omega) \cdot c$ nichtlineare Dispersion

Gruppengeschwindigkeit $v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega \cdot n(\omega))}{d\omega}}$

$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{\text{ph}}$

Phasengeschwindigkeit

Typische Frequenzabhängigkeit (Resonanzverhalten)



normale Dispersion

(steht im
 Transparenzgebiet)
 $\frac{dn}{d\omega} > 0 \quad v_g < v_{\text{ph}}$

anomale
Dispersion

$$\frac{dn}{d\omega} < 0 \quad (\text{bei Absorption})$$

Beziehung zwischen $\epsilon'(\omega)$ und $\epsilon''(\omega)$:
(Kramers - Kronig - Relation)

- Allgemein gültiger Zusammenhang zwischen Dispersion ($n(\omega)$) und Absorption ($\mu(\omega)$) erlaubt z.B. Berechnung der Dispersionsbeziehung aus dem Absorptionsspektrum und umgekehrt!
- Folgt aus der Kausalität.

Beweis folgt.