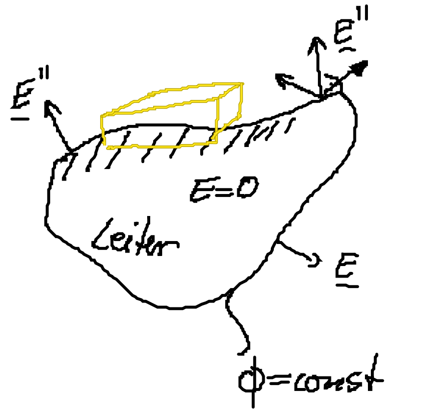
1.6. Leiter in der Elektrostatik (Fortführung)

$$E_n'' - E_n' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(r)$$

Flächenladung σ

Normalkomponente "außen"

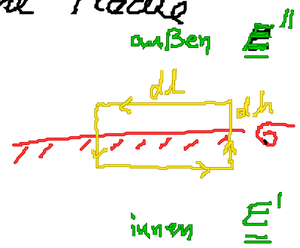


Tangentialkomponenten?

- ist stetig beim Durchgang durch geladene Fläche

<u>Beweis:</u>

$$\oint_{\partial F} \underline{E}\, d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \underline{\nabla} \times \underline{E}\, d\underline{f} = 0$$



$F = dl \cdot \Delta h$ mit $dl \to 0$, $\Delta h \to 0$

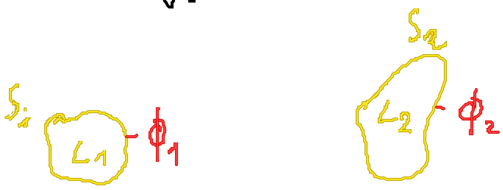
$$(E_t'' - E_t')\, dl = 0$$

$$\boxed{E_t'' - E_t' = 0}$$

$$\boxed{E_n'' - E_n' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\underline{r})}$$

1.6.1. Randwertaufgabe der Elektrostatik mit Leitern

1. Grundaufgabe:



geg: Leiter L_α (Oberflächen S_α) mit Potenziale ϕ_α

ges: • Q_α ?

• $\phi(\underline{r})$ als Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)$ mit Randbedingungen $\phi(\underline{r})\Big|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$

$\phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Allgemeine Lösung von $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$\phi = \phi_{inhom} + \phi_{hom}$$

spezielle Lösung zu RB bei $r \to \infty$: $\phi \to 0$

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(r')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

allg. Lösung $\rho = 0$
$\Delta\phi = 0$
[Laplace Gleichung]
mit speziellen RB.

(*)
$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r'\, G(\underline{r}-\underline{r}')\rho(\underline{r}') + \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \nabla_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}$$

wobei die Green'sche Funktion $G(\underline{r}-\underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(r'-r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ zu

den RB $G(r-r')\Big|_{\substack{\underline{r}\in S_\alpha \\ \underline{r}'\in V}} = 0$, $\quad G(\underline{r}-\underline{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ ist.

Beweis:

Aus dem Gauß'schen Satz $\int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{v} = \int d^3r \, \mathrm{div}\, \underline{v}$

mit $\underline{v} = \psi \underline{\nabla} \varphi$ folgt ① $\int_{\partial V} d\underline{f}\, \psi \nabla \varphi = \int_V d^3r \left(\psi \Delta \varphi + \nabla\psi \nabla\varphi \right)$

mit $\underline{v} = \varphi \nabla \psi$ folgt ② $\int_{\partial V} d\underline{f}\, \varphi \nabla \psi = \int_V d^3r \left(\varphi \Delta \psi + \nabla\varphi \nabla\psi \right)$

$\Rightarrow$ ② − ① "Green'scher Satz"

$$\int_{\partial V} d\underline{f} \left(\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi \right) = \int_V d^3r \left(\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi \right)$$

Setze: $\psi(\underline{r}) := G(\underline{r} - \underline{r}')$ $\quad \partial V = \bigcup_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$
$\varphi(r) := \phi(\underline{r})$

(i) zeige $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \implies \phi(\underline{r}) = (*)$

(ii) zeige $\phi(r) = (*) \implies \begin{cases} \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \text{im Inneren von } V \\ \phi \text{ erfüllt RB} & \phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha \end{cases}$

(i) Green'scher Satz:

$$\underbrace{\int_{\partial V}}_{\bigcup^n S_\alpha} d\underline{f}\; \phi(\underline{r}) \nabla_r G(\underline{r} - \underline{r}') - \underbrace{\int_{\partial V} d\underline{f}\; G(\underline{r} - \underline{r}') \nabla \phi}_{0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\overbrace{\int_V d^3r\, \phi(\underline{r}) \delta(r - r')}^{\phi(\underline{r}')} - \int_V d^3r\, G(r - r') \rho(r) \right]$$

Vorzeichenwechsel da $d\underline{f}$ nach außen zeigt

wegen $G|_{\underline{r} \in S_\alpha} = 0$

$\underline{r}'$ Beobachter

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}) + \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\underline{\nabla}_r\, G(\underline{r}-\underline{r}')}$$

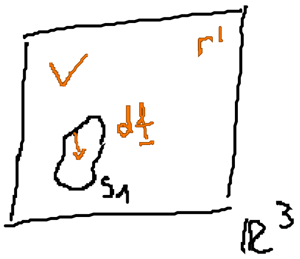
(ii) Teil 1

$$\Delta_{r'} \phi(\underline{r}') = \int_V d^3r\, \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\,\rho(\underline{r}) + \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\cdot\underline{\nabla}_r\, \underbrace{\Delta_{r'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

0

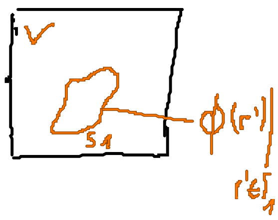
$\underline{r} \in S_\alpha$
$r' \in V$

$$\Delta_{r'} \phi(\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\underline{r}')$$



(ii) Teil 2

z.z. $\phi(r')\big|_{\underline{r}' \in S_\beta} = \phi_\beta$



$$= \int_V d^3r\, \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}' \in S_\beta}}_{0}\, \rho(\underline{r}) + \varepsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \oint_{S_\alpha} d\underline{f}\,\underline{\nabla}_r\, G\Big|_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_{\partial V} d\underline{f}\, \phi(\underline{r})\, \underline{\nabla}_r\, G(\underline{r}-\underline{r}')\Big|_{\underline{r}' \in S_\beta}$$

(Vorzeichenwechsel da $d\underline{f}$ nach außen zeigen soll)

Green'scher Satz

$$= -\varepsilon_0 \Big[\int_{\partial V} d\underline{f}\, \overbrace{G(r-r')\Big|_{r' \in S_\beta}}^{0} \nabla_r \phi +$$

$$\underbrace{\int_V d^3r \Big(\phi \Delta_r \underbrace{G(r-r')}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(r-r')}}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\phi(r')\big|_{r' \in S_\beta}} - \overbrace{G(r-r')\Big|_{\underline{r}' \in S_\beta}}^{0} \Delta \phi \Big) \Big]$$

$$= \phi_\beta$$

Ladung (war gesucht, ϕ_α gegeben)

$$Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} df\, \sigma = \varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} \underbrace{df\, \underline{n}\, \underline{E}}_{d\underline{f}\cdot\underline{E}} = -\varepsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla \phi$$

- Konstruktion der Green'schen Funktion auch möglich über Methode der Bildladungen (Spiegelladungen)

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-r''|} \right)$$