6. Kommutierende Operatoren, gemeinsame Eigenfunktionen und zweite Messung

Diskussion störungsfreie / gestörte Messung zweier Observablen

d.h. betrachten 2 hermitesche Operatoren $\underline{A}$, $\underline{B}$, kennen Lsg. d. Eigenwertproblems

$\{\varphi_n^A(\vec{r})\}$ sei vollständiges System v. Eigenfunktionen zu $\underline{A}$:

$\underline{A}\,\varphi_n^A(\vec{r}) = a_n\,\varphi_n^A(\vec{r})$, $\underline{B}$: analoge Definition

„$\{\varphi_n^A(\vec{r})\}$ heißt Basis von $\underline{A}$"

a) Ist $\{\varphi_n^A = \varphi_n^B \equiv \varphi_n\}$ Basis von $\underline{A}$ und $\underline{B}$, so $[\underline{A},\underline{B}] = 0$

Beweis: $[\underline{A},\underline{B}]\,\varphi_n = (\underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A})\,\varphi_n$

anwenden d. Eigenwertproblem: $\underline{A}\varphi_n = a_n\varphi_n$, $\underline{B}\varphi_n = b_n\varphi_n$

$= (a_n b_n - b_n a_n)\,\varphi_n = 0\,\varphi_n$

$\rightarrow$ weil Beziehung $\forall\,\varphi_n$ gilt: $[\underline{A},\underline{B}] = 0$

b) Ist $[\underline{A},\underline{B}] = 0$, so haben $\underline{A}$ und $\underline{B}$ ein gemeinsames System von Eigenfunktionen $\{\varphi_n^A = \varphi_n^B = \varphi_n\}$.

Beweis: $[\underline{A},\underline{B}] = 0 \quad\rightarrow\quad (\underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A})\,\varphi_m^A = 0$

$$\underline{A}(\underline{B}\,\varphi_m^A) = \underline{B}(\underline{A}\,\varphi_m^A) \quad \text{mit} \quad \underline{A}\varphi_m^A = a_m\,\varphi_m^A \quad (*)$$

$$\underline{A}(\underline{B}\,\varphi_m^A) = a_m(\underline{B}\,\varphi_m^A) \quad (**)$$

es muß sich also $B\varphi_m^A \sim \varphi_m^A$ wg. $(*)$ $(**)$

mit Proportionalitätsfaktor b_n :

$$\underline{B}\ \varphi_n^A = b_n\ \varphi_n^A$$

$\longrightarrow$ $\underline{A}$ und $\underline{B}$ haben identische Eigenfunktionen

c) Menge der Operatoren $\{A, B \cdots M\}$ heißt vollständiger Satz von Operatoren für ein System wenn

i) kommutieren miteinander

ii) jeder andere Operator läßt sich als Liko darstellen

die gemeinsamen Eigenfunktionen dieser Operatoren können nummeriert werden:

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi\ (a_n, b_n \cdots m_n)$$

d) Begriff der gleichzeitigen störungsfreien / gestörten Messg. v. $\underline{A}, \underline{B}$,

$\underline{A}$ und $\underline{B}$ Messung diskutieren

- Start sei Wellenfunktion $\Psi = \sum_i c_i\ \varphi_i$, φ_i aus: $\underline{A}\ \varphi_i^A = a_i\ \varphi_i^A$, $\underline{B}\ \varphi_i^B = b_i\ \varphi_i^B$
- zunächst $\underline{A}$ messen : man erhält Messwert a_n mit Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ und $\Psi \to \varphi_n^A$; jetzt $\underline{B}$ messen

(i) wenn $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$: $\varphi_n^A = \varphi_n^B$

$\Psi \xrightarrow{A} \varphi_n^A, a_n \xrightarrow{B} \varphi_n^B, b_n$ d.h. Wellenfkt bleibt erhalten nach $\underline{B}$-Messg.

störungsfreie Messung von $\underline{A}, \underline{B}$.

(ii) wenn $[\underline{A}, \underline{B}] \neq 0$

$$\psi \xrightarrow{A} \varphi_n^A, a_n \xrightarrow{B} \varphi_m^B, b_m \quad \text{und } \varphi_n^A \neq \varphi_n^B$$

$$\varphi_n^A = \sum_j c_j \varphi_j^B$$

d.h. Wellenfkt. bleibt nicht erhalten nach B-Messung

nicht störungsfreie Messg. v. $\underline{A}, \underline{B}$

Nur wenn $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$, so stören sich die Messungen nicht gegenseitig.

Im Experiment bedeutet dies eine Streuung der Messwerte die nicht unterboten werden kann $\rightarrow$ Unschärferelation

7. Allgemeine Unschärferelation bei Messung zweier Observabler

bisher: Wellenpaket $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hat{=}$ keine scharfen Messwerte

suche allgemeine Beziehung f. $\underline{A}, \underline{B}$

a) Unschärfeprodukt f. hermitesche Operatoren

$\underline{A}_1, \underline{A}_2$ sind 2 hermitesche Operatoren, Schwankungen sind $\Delta A_1, \Delta A_2$,

So gilt: $$\Delta A_1 \cdot \Delta A_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\underline{A}_1, \underline{A}_2] \rangle \right|$$

Bsp: $$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{über } [x, p_x] = i\hbar$$

Relation ist allgemeingültig und Beweis über Schwarzsche Ungleichg.

f. Skalarprodukt von Operatorabweichung $\Delta \underline{A}_i = \underline{A}_i - \langle A_i \rangle$, $\Delta A_i = \sqrt{\langle \Delta \underline{A}_i^2 \rangle}$

Wenn Kommutator $\neq 0$ ist, so störungsfreie Messg. nicht möglich.

b) Energie-Zeit Unschärfe

Zeit trägt kein Operatorcharakter, Energie schon

Vgl: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \longrightarrow [\Delta E \, \Delta t] \hat{=} [\hbar]$

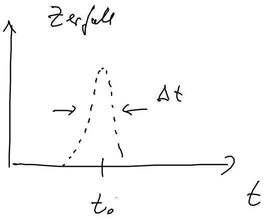
Energie ist nicht scharf festgelegt bei Messung

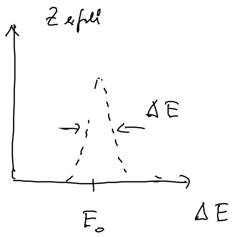
In QM muß u.U. strikte Energieerhaltung aufgegeben werden

(später: Fermis goldene Regel gilt nur f. lange Zeiten)

typischerweise $\Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar$ (Abschätzung einzeln f. jedes Exp.)

Bsp: α - Zerfall, spontane Emission v. Licht





$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar$

8 Bisherige Axiome der QM

1) Zustände $\Psi(\vec{r},t)$ eines Systems sind Elemente d. Hilbertraums.

2) Jeder Observablen wird ein linearer selbstadjungierter Operator im Raum der Zustände zugeordnet

3) Mittelwerte sind bestimmt über $\langle \underline{A} \rangle = (\Psi, \underline{A} \Psi)$

4) $\Psi(\vec{r},t)$ ist bestimmt über Schrödingergleichung $i\hbar \partial_t \Psi = \underline{H} \Psi$

5) Theorie d. Messg. über Zerlegung in vollständige Funktionensystem.

9. Ehrenfestsche Theorem und klassischer Grenzfall

Wie ergibt sich die Newtongleichung?

a) Theorie der Mittelwerte (später: $\underline{\vec{r}}, \underline{\vec{p}} \hat{=} \underline{A}$)

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\, \underline{A}\, \psi(\vec{r},t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \left(\dot{\psi}^* \underline{A}\, \psi + \psi^* \dot{\underline{A}}\, \psi + \psi^* \underline{A}\, \dot{\psi} \right)$$

nutze die Schrödingergleichung. $\quad i\hbar \dot{\psi} = \underline{H}\psi \,, \quad -i\hbar \dot{\psi}^* = \underline{H}\psi^*$

$$= \int d^3r \left(\left(\frac{i}{\hbar} \underline{H}\psi^* \right) \underline{A}\, \psi + \psi^* \dot{\underline{A}}\, \psi + \psi^* A \left(-\frac{i}{\hbar} \underline{H}\psi \right) \right)$$

$\underline{H} = \underline{H}^+$ $\qquad *$

$$= \underbrace{\langle \partial_t \underline{A} \rangle}_{*} + \frac{i}{\hbar} \int d^3r\, \psi^* \underbrace{\left(\underline{H}\,\underline{A} - \underline{A}\,\underline{H} \right)}_{[\underline{H},\underline{A}]} \psi$$

Bewegungsgleichung f. Mittelwert $\langle \underline{A} \rangle$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \underline{A} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \left\langle [\underline{H}, \underline{A}] \right\rangle}$$

Ehrenfesttheorem

b) Spezialisierung auf Ort und Impuls

i) $\underline{A} \mathrel{\hat{=}} \underline{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt} \langle \underline{\vec{r}} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \underline{\vec{r}} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \left\langle [\underline{H}, \underline{\vec{r}}] \right\rangle ,$$

Newtongrenzfall: $\underline{H} = \frac{\underline{\vec{p}}^2}{2m} + \underline{V}(\vec{r})$

$$= 0 + \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{\underline{\vec{p}}^2}{2m} + \underline{V}(\vec{r}), \underline{\vec{r}} \right] \right\rangle$$

$[\underline{V}(\vec{r}), \underline{\vec{r}}] = 0 \quad , \quad [\underline{\vec{p}}^2, \underline{\vec{r}}] = -2i\hbar\, \underline{\vec{p}} \quad$ (ÜA, Tutorium)

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle \vec{r} \rangle = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle \rightarrow \quad m\frac{d}{dt}\langle \vec{r} \rangle = \langle \vec{p} \rangle}$$

$\hat{=}$ Impulsdefinition nach Newton für qm. Mittelwerte

ii) $\underline{A} \hat{=} \vec{p}$

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{p} \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\underline{H}, \vec{p}] \rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \underline{V}(\vec{r}), \vec{p} \right] \right\rangle$$

$[\vec{p}^2, \vec{p}] = 0$, $[\underline{V}(\vec{r}), \vec{p}] = \frac{\hbar}{i}\vec{f}(\vec{r})$, mit $\vec{f} = -\vec{\nabla}\underline{V}(\vec{r})$ (ÜA)

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle \vec{p} \rangle = \langle \vec{f} \rangle \quad \text{Impulsdynamik, analog. Newtongesetz f. Mittelwerte}}$$

Ehrenfestsches Theorem:

Die Newtongleichungen gelten f. qm. Erwartungswerte

c) Achtung!

Problem liegt in Kraftdefinition: $\langle \vec{f} \rangle = -\int d^3r\, \Psi^*(\vec{r},t)\, \vec{\nabla} V(\vec{r})\, \Psi(\vec{r},t)$

$\neq$ Newtonkraft $-\vec{\nabla} V(\vec{r})$

Wann wird Kraft zu Newtonkraft:

$$\langle \vec{f} \rangle \approx \vec{\nabla}_{\langle r \rangle} V(\langle \vec{r} \rangle)$$

$\langle \vec{r} \rangle$: Bahnkurve, geht nur bei geringer Abweichg. von Mittelwert $\langle r \rangle$

$$\langle f(\vec{r})\rangle = \langle f(\langle \vec{r}\rangle + \underbrace{(\vec{r} - \langle \vec{r}\rangle)}_{\text{Abweichg. v. Bahnkurve } \delta\vec{r}})\rangle$$

$$= \underbrace{\langle \vec{f}(\langle \vec{r}\rangle)\rangle}_{\text{Newton}} + \underbrace{\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\langle\vec{r}\rangle}\right)^n \vec{f}(\langle\vec{r}\rangle)\right\rangle}_{\text{Quantenkorrekturen } \delta\vec{r}\neq 0}$$

Wann Quantenkorrektur $=0$?

- freies Teilchen $V=0$, $\vec{f}=0$

- harmonischer Oszillator : Quantenkorrekt. $\longrightarrow 0$ für $\vec{f} \sim \langle\vec{r}\rangle$