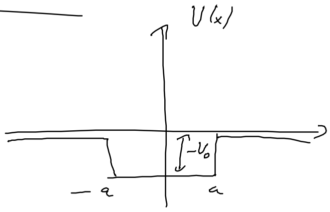
3.4 Potentialtopf (Wiederholung

$$V(x) = -V_0 \, \Theta(a - |x|)$$



3.4.1 Gebundene Zustände im Potentialtopf

a) ψ außerhalb des Topfes: $V = 0$ $\qquad \psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$

$$\psi'' = -2m\,E/\hbar\,\psi \qquad (|x| > a)$$

$$\varkappa = \sqrt{2m(-E)}\,/\hbar$$ sinnvoll, da für $E < 0$, $\varkappa$ reelle Zahl um keine schwingende Lsg zu bekommen.

$$\rightarrow \psi'' = \varkappa^2 \psi$$

Lösungen sind $\psi(x) \sim e^{\pm \varkappa x}$ (Fundamentalsystem)

exp anwachsende Lsg weglassen (nicht normierbar)

b) ψ innerhalb des Topfes:

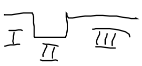
$$\psi'' = -2m\,(E + V_0)/\hbar^2\,\psi \qquad (|x| < a)$$

$$q = \sqrt{2m(\underbrace{E + V_0}_{\geq 0})}\,/\hbar$$ (sinnvoll, da oszillierende Lösungen von Grenzfall ∞ tiefer Topf bekannt.)

$$\rightarrow \psi'' = -q^2 \psi$$

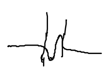
Lösung sind $\psi(x) \sim e^{\pm i q x}$ (Fundamentalsystem)

c) aufgrund der Spiegelsymmetrie des Potentials können alle Lösungen als gerade und ungerade klassifiziert werden:



$$\psi_g = \begin{cases} A^g_{II} \cos qx & |x| < a \\ A^g_{III/I}\, e^{\mp \varkappa x} & x \gtrless \pm a \end{cases}$$

$$\psi_u = \begin{cases} A^u_{II} \sin qx & |x| < a \\ A^{u\pm}_{III/I}\, e^{\mp \varkappa x} & x \gtrless \pm a \end{cases}$$



(1 Normfaktor reicht aus, da wir über den gesamten Raum integrieren)

Frage: Welche Energie E nehmen die gebundenen Zustände ein?

gerade Symmetrie:

Stetigkeitsbed. f. Wellenfunktion und ihre Ableitung $x = +a$

1) $A^g_{II} \cos qa = A^g_{III} e^{-\varkappa a}$

2) $-A^g_{II} q \sin qa = -\varkappa e^{-\varkappa a} A^g_{III}$

} Gleichungssystem, Determinante muss verschwinden

nach Division $\frac{(2)}{(1)}$ $\quad \tan(qa) = \frac{\varkappa}{q} = \frac{(2m(-E))^{\frac{1}{2}}/\hbar}{q}$

$= \left| \begin{array}{l} \text{mit } q^2 = 2m(E+V_0)/\hbar \text{ folgt} \\ q^2\hbar^2 - 2mV_0 = 2mE \end{array} \right| = \frac{(2mV_0 - q^2\hbar^2)^{\frac{1}{2}}/\hbar}{q} = \frac{\left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} - q^2a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{qa}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\tan(qa) = \frac{(\xi^2 - q^2a^2)^{\frac{1}{2}}}{qa}}$ Bestimmungsgl. für festen Parameter ξ.

$\xi = \frac{(2mV_0)^{\frac{1}{2}} a}{\hbar}$ (fest vorgegeben)

- ξ charakterisiert die Stärke des Potentialtopfes für ein Teilchen der Masse m. (dimensionsloser Parameter)

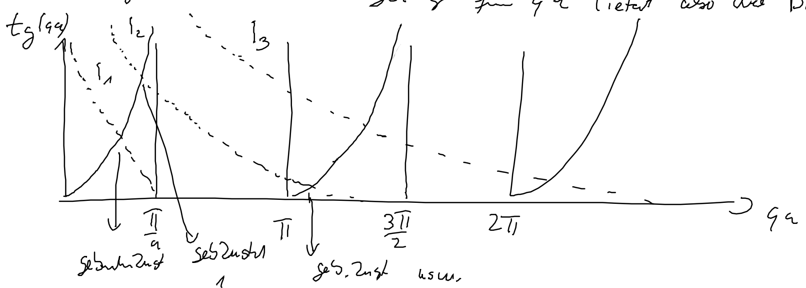
Je größer ξ desto besser werden Teilchen lokalisiert.

$\rightarrow$ Energie als Fkt von qa bestimmen:

aus $q = (2m(E+V_0))^{\frac{1}{2}}/\hbar$ ergibt sich die Energie zu:

$\rightarrow \quad E = -V_0 + \frac{q^2\hbar^2}{2m} = -V_0\left(1 + \frac{q^2\hbar^2}{2mV_0}\right) = -V_0\left(1 - \frac{(qa)^2}{\xi^2}\right)$

Lösung der transzendenten Gleichg. für qa liefert also die Bindungsenergie E.



$f = \frac{[\xi^2 - (qa)^2]^{\frac{1}{2}}}{qa}$ $\quad$ klingt $f \sim \frac{1}{qa}$

Bemerkungen:

- verschieden viele Lösungen für verschiedene Potentialstärken ξ.
- Festleg. der Energie: ξ festwählen, qa ablesen, E nach obiger Formel berechnen

- Wellenfunktion festlegen:

$$\psi_g = \begin{cases} A_1 \cos qx & |x|<a \\ A_2 e^{\mp kx} & x \gtrless \pm a \end{cases}$$

durch die Normierungsbed.

- $$\left(\frac{\xi^2-(qa)^2}{(qa)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{für } qa = \xi$$

$\longrightarrow$ Anzahl der Schnittpunkte n_s ($\hat{=}$ Anzahl der gebunden Zustände) kann aus dem Wert von ξ (Potentialstärke) abgelesen werden.

n_s^g = nächst größere natürlich Zahl zu $\left(\frac{\xi}{\pi}\right)$.

Bsp. $\xi < \pi \longrightarrow 1$ gebunden Zustand

- es gibt also für $\xi > 0$ immer mindestens ein gerade gebund. Zustand.
- mit ~~wachs~~ wachsender Stärke des Potentials ξ steigt die Zahl der gebunden Zustände
- analoges Vorgehen für die ungerade Zustände, hier nicht.
- q ist bekannt, $k = \left[2mV_0 \left(1 - \frac{(qa)^2}{\xi^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} / \hbar$

3.4.2 Ungebunden Zustände im Potentialtopf

$E > 0$, oszillierende Lsg. $\left(\psi''_{innen} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\psi, \quad \psi''_{außen} = -\frac{2m}{\hbar^2} E\psi \right)$

Wellenzahl im Außenraum: $k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad (e^{\pm ikx}$ ist Lsg$)$

Wellenzahl im Innenraum: $q = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar \quad (e^{\pm iqx})$

Ergebnis der Schwelle verwenden: $k = \sqrt{2mE}/\hbar, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar = i\sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$

jetzt $V_0 \to -V_0 \quad \Rightarrow \kappa = iq$ und $\sinh(iq) = i\sin q$, $\cosh(iq) = \cos q$

$$S(E) = \frac{e^{-i2ka}}{\cos(2qa) - \frac{i}{2}\left(\frac{q}{k}+\frac{k}{q}\right)\sin(2qa)}$$

$$\Rightarrow |S(E)|^2 = \frac{1}{1-\sin^2(2qa) + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k}+\frac{k}{q}\right)^2 \sin^2(2qa)}$$

Faktor ist $\frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{q}{k}-\frac{k}{q}\right)^2 \sin^2(2qa)} \longrightarrow$$

$\max(|S(E)|^2) = 1$ für $2q_{max}a = n\pi$ entspricht Punkten max. Transmission.

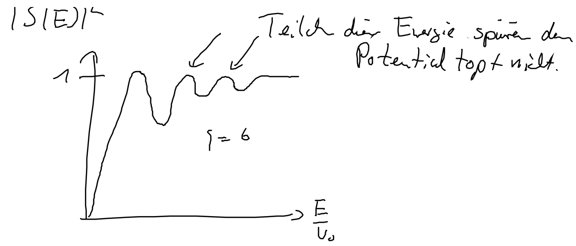
Für die Energie

$$E_{max} = \frac{\hbar^2 q_{max}^2}{2m} - V_0 = n^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} - V_0$$

$\left(q_{max} = \frac{n\pi}{2a}\right)$

ist die Transmission maximal $=1$ an der Energieresonanz des so tiefen Topfes.

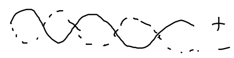
typischer Verlauf v. $|S(E)|^2$



Begründung:

einfallende Elektronenwelle wird sowohl von +a, als auch −a reflektiert,

die reflektierte Wellen unterscheidet sich f. E_{max} um einen Phasensprung π



→ Auslöschung dieser Wellen (destruktive Interferenz)

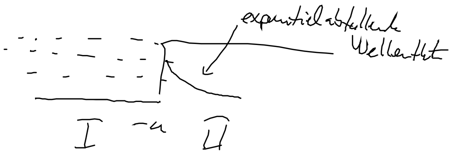
→ volle Transmission, da es dann nur die eingestrahlte Welle gibt.

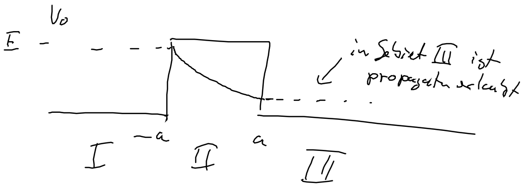
3.5 Der quantenmechanische Tunneleffekt

Frage: hatten gesehen, dass ein Teilchen trotz $E < V_0$ in Potentialstufe eindringen kann.

Verhalten eines solchen Teilchens an einer Potentialschwelle?

Situation:





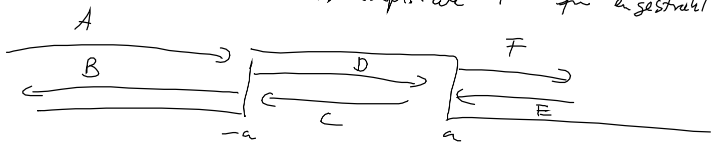
konkret:

Kann ein qm. Teilchen, das bei $x = -a$ „reflektiert" wird ($E < V_0$)

durch die Potentialschwelle $\Delta x = 2a$ gelangen und sich weiterbewegen bei $x > a$?

Wenn ja: „Tunneln durch eine Barriere"

Berechnung der Transmissionsamplitude F für eingestrahlte Welle



1. dim. Modell

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x \le -a \\ C e^{-\varkappa x} + D e^{\varkappa x} & -a \le x \le a \\ F e^{ikx} + E e^{-ikx} & x \ge a \end{cases}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\varkappa = \sqrt{2m(\underbrace{V_0-E}_{>0})}/\hbar$

$$S(E) = \frac{F}{A} = \frac{1}{(\cosh(2\varkappa a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\varkappa a))\, e^{2ika}} \qquad \varepsilon = \frac{\varkappa}{k} - \frac{k}{\varkappa}$$

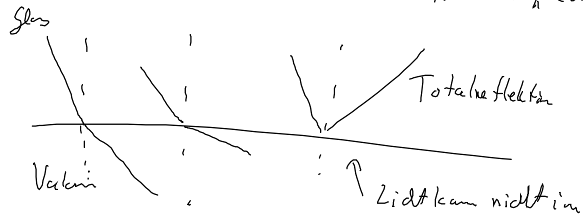
Frage um den Tunneleffekt zu untersuchen: was ist $|\psi|^2$ bei $x > a$?
normierte Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$|S(E)|^2 = \frac{1}{1+(1+\frac{\varepsilon^2}{k})\sinh^2(2\varkappa a)} = \text{konstant} \neq 0$$

Maß f. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit jenseits der Barriere.

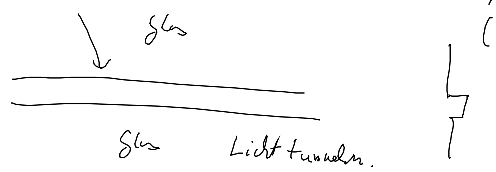
Bemerkungen:

- Es ex. im gesamten Raum rechts der Barriere eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(x) \sim S^2$ obwohl $E < V_0$ (Tunneleffekt = quantenmech. Phänomen)
- Der Grenzfall $\varkappa a \to \infty$ (hohe und lange Barriere) gibt den klassischen Grenzfall $|S|^2 \to 0$ (totale Reflektion)
- $|S(E)|^2 \sim e^{-4\varkappa a}$, ist der Korrekturterm in $\varkappa a \gg 1$ also die Tunnelwahrscheinlichkeit nimmt ab, wenn E abnimmt ($\varkappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$).
- klassische Analogie zum Tunneleffekt („evaneszentes Licht")



„Potentialstufe" der Brechungsindices

Licht kann nicht in Außenraum sein.
aber Maxwellgl. zeigen „evaneszentes" Feld
(exponentiell abklingend, nicht im Vakuum propagiert)

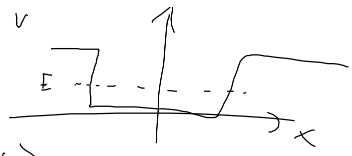


Licht tunneln.

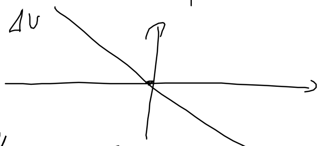
Anwendung zum Tunneleffekt

a) Rastertunnelmikroskop: Metallspitze als Sonde z. Untersuchung von Oberflächen

Prinzip: Elektron in Metall – Potentialtopfmodell



← Energie eines Elektrons im Topf
(i.a. endlicher Potentialtopf)



Einschalten eines Felds E_0 ($\Delta V = -e x E_0$)

mit Tunnelwahrscheinlichkeit „⇒" e^- im Feld E_0 beschleunigt.
Tunnelnde Elektronen im eff. Potential mgl. („Feldemission")

– man benötigt sehr starke Felder um ein messbaren Tunneleffekt zu erzeugen.

– Feldüberhöhung an spitzen Gegenstand („Metallnadel)

– Abrastern v. Material mit Metallnadel
Elektronen werden aus der Nadel herausgelöst,
im Feld beschleunigt → Abb. der Oberfläche, z.B. einzelner Atome.

b) Der α – Zerfall

bekannt: α Teilchen können von schweren Atomkernen emittiert werden.
(α – Radioaktivität, $Z_\alpha = 2$)

Beschreibung: α – Teilchen sieht effektives Potential
von allen anderen Teilchen im Atomkern: