4. Messprozess und Bedeutung von Eigenwert / Eigenfunktion

Eigenwertproblem eines hermiteschen Operators $\underline{A}\,\varphi_n = a_n \varphi_n$

als gelöst annehmen, $\underline{A}$ einer Messgröße zuordnen,

Frage nach physikalischer Bedeutung von a_n, φ_n ?

4.1. Kurzkurs : charakteristische Funktion

- $w(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte, z.B. Elektron am Ort x zu registrieren
- $w(x)\,dx$ Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis in Intervall $\left[x-\frac{dx}{2}, x+\frac{dx}{2}\right]$ auftritt

a) n-tes Moment der Verteilung

$$m_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x^n\, w(x) = \langle x^n \rangle \qquad n \in \mathbb{N}$$

b) charakteristische Funktion $\hat{=}$ Fouriertrafo von $w(x)$

$$\chi(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-ix\tau}\; w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; w(x) \sum_n \frac{1}{n!} (-ix\tau)^n$$

$$= \sum_n m_n \frac{(-i\tau)^n}{n!}$$

günstig in Situationen in denen man leichter m_n als $w(x)$ bestimmen kann:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi}\; e^{ix\tau}\; \chi(\tau)$$

c) Mittelwert einer Größe $F(x)$

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; w(x)\, F(x)$$

d) Verwendung in der Quantentheorie $\quad w \to |\psi|^2$

$$\langle F(\vec{r},\vec{p})\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r \; \psi^*(\vec{r},t) \; F(\vec{r},\vec{p}) \; \psi(\vec{r},t)$$

symmetrische Schreibweise um Impulsmittelwert zu beschreiben

4.2. Anwendung auf Quantentheorie

Messung einer Observablen, die über einen hermiteschen linearen Operator $\underline{A}$ definiert ist: $\quad \underline{A}\,\varphi_m = a_m\,\varphi_m \quad$ (Beispiel Kasten)

a) System befindet sich zum Zeitpunkt der Messung im Eigenzustand φ_m

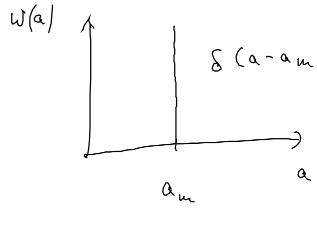
$$m_n = \langle \underline{A}^n \rangle = \int d^3r \; \varphi_m^*(\vec{r}) \; \underline{A}^n \; \varphi_m(\vec{r}) = (\varphi_m, \underline{A}^n \varphi_m) = (\varphi_m, a_m^n \varphi_m) = a_m^n$$

$\rightsquigarrow m_n = a_m^n$, jetzt über $\chi(\tau)$, $w(a)$ berechnen

$$\rightsquigarrow \chi(\tau) = \sum_n a_m^n \frac{(-i\tau)^n}{n!} = e^{-i\tau a_m}$$

$$\rightsquigarrow w(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} \; e^{ia\tau} \; e^{-i\tau a_m} = \delta(a - a_m)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte, Ereignis bei a vorzufinden



Integral über kleine Umgebung von a_m gibt die

Wahrscheinlichkeit $p(a_m)$, Messwert a_m zu messen

$$p(a_m) = \int_{a_m-\varepsilon}^{a_m+\varepsilon} da\, w(a) = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{In einem Eigenzustand } \varphi_m \text{ misst man mit Sicherheit } (p(a_m)=1) \\ \text{den Messwert } a_m: \quad \Psi(\vec{r},t)\big|_{t=\text{Messg.}} = \varphi_m(r)\end{array}}$$

Mittelwert $\langle \underline{A} \rangle = \int da\, w(a)\, a = \int da\, \delta(a-a_m)\, a = a_m$

Streuung $\Delta A = \left(\langle \underline{A}^2 \rangle - \langle \underline{A} \rangle^2\right)^{1/2} = 0$

b) System befinde sich in beliebigem Zustand Ψ zum Zeitpunkt der Messung

da $\{\varphi_m\}$ vollständig ist, kann $\Psi = \sum_m c_m \varphi_m$ geschrieben werden

$$m_n = \langle \underline{A}^n \rangle = (\Psi, \underline{A}^n \Psi) = \sum_{m,m'} (c_m \varphi_m, \underline{A}^n c_{m'} \varphi_{m'})$$

$$= \sum_{m,m'} c_m^* c_{m'} a_{m'}^n (\varphi_m, \varphi_{m'}) = \sum_m |c_m|^2 a_m^n$$

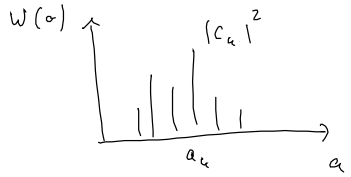
$$\Rightarrow m_n = \sum_m |c_m|^2 a_m^n$$

$$\Rightarrow \chi(\tau) = \sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} \sum_m |c_m|^2 a_m^n = \sum_m |c_m|^2 \sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} a_m^n$$

$$= \sum_m |c_m|^2 e^{-i\tau a_m}$$

$$\Rightarrow w(a) = \sum_m |c_m|^2 \delta(a - a_m)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



Wahrscheinlichkeit Messwert a_n zu messen:

$$\int_{a_n-\frac{\varepsilon}{2}}^{a_n+\frac{\varepsilon}{2}} da\, w(a) = \int_{a_n-\frac{\varepsilon}{2}}^{a_n+\frac{\varepsilon}{2}} da \sum_m |c_m|^2 \delta(a-a_m) = \sum_m |c_m|^2 \delta_{mn} = |c_n|^2$$

> Im Superpositionszustand $\Psi = \sum_m c_m \varphi_m$ ist die Wahrscheinlichkeit a_n zu messen gleich $|c_n|^2 = \left| \int d^3r\, \varphi_n^*(r)\, \Psi(\vec{r}, t_{\text{Messg.}}) \right|^2$

Mittelwert: $\langle \underline{A} \rangle = \sum_m |c_m|^2 a_m$

Streuung: $\Delta A = \left(\sum_m |c_m|^2 a_m^2 - \left(\sum_m |c_m|^2 a_m \right)^2 \right)^{1/2} \neq 0$ i.a.

c) Folgen f. den Messprozess

- Observable (Messgröße in QT) wird durch linearen, hermiteschen Operator $\underline{A}$ beschrieben, Eigenwertproblem: $\underline{A}\, \varphi_m = a_m \varphi_m$

- eine einzelne Messg. zeigt dann einen der Werte a_m an

- nach Messung mit Ergebnis a_m muß sich System in φ_m befinden (a)
  (Messg. beeinflußt Zustand!)

- wiederholte Messungen an demselben System gibt wieder a_m mit 100% Wahrscheinlichkeit

- wenn System vor Messung in Superposition ist $\Psi = \sum_n c_n \varphi_n$,

so ändert die Messung den Zustand $\Psi \to \varphi_n$, wenn a_n gemessen wird,

die Wahrscheinlichkeit daß a_n auftritt ist $|c_n|^2$

- Prozess $\Psi \to \varphi_n$ „Reduktion der Wellenfunktion" („Projektion auf Eigenzustand")

durch die Wechselwirkung mit Messapparat:

unkontrolliert und kann nur über Wahrscheinlichkeitsaussagen

beschrieben werden.

- Messprozess an $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$ liefert $\{a_i, |c_i|^2\}$

Konsistenz mit Bornscher Interpretation:

$$\langle \underline{A} \rangle = \sum_i |c_i|^2 a_i = \sum_i c_i^* c_i a_i$$

$$= \sum_i \underbrace{\int d^3r\, \Psi^*(\vec{r},t)\, \varphi_i(\vec{r})}_{c_i^*} \underbrace{\int d^3r\, \varphi_i^*(\vec{r}')\, \Psi(\vec{r}',t)}_{c_i} a_i$$

$= |$ ---- $=$ Vollständigkeit $= \delta(\vec{r}-\vec{r}')$, und $\varphi_i^* a_i = \underline{A}\, \varphi_i^*$ $|$

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3 \Psi^*(\vec{r},t)\, \underline{A}\, \Psi(\vec{r},t) \quad \text{nach Born} \checkmark$$

> Der qm. Erwartungswert entspricht Mittel über viele Experimente,
> das einzelne Experiment an $\sum_i c_i \varphi_i$ ist zufällig

5.) Berechnung der Koeffizienten $c_n(t)$ aus Schrödingergleichung

allgemeinste $\underline{H}$ (bisher):

$$\underline{H} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_0(\underline{\vec{r}}) + W(\underline{\vec{r}}, \underline{\vec{p}}, t) = \underline{H}_0 + W(\underline{\vec{r}}, \vec{p}, t)$$

lösbar: $\underline{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$

Ansatz f. $\Psi(\vec{r}, t) = \sum_m c_m(t)\, \varphi_m(\vec{r})$

in Schrödingergl. $i\hbar \dot{\Psi} = H \Psi$ einsetzen, mit $\int d^3r\, \varphi_n^*(\vec{r})$ multiplizieren

$$\underset{\text{ü A}}{\longrightarrow} \quad i\hbar\, \dot{c}_n(t) = E_n c_n(t) + \sum_m c_m(t)\, W_{nm}(t)$$

$$W_{nm}(t) = \int d^3r\, \varphi_n^*(\vec{r})\, W(\underline{\vec{r}}, \underline{\vec{p}}, t)\, \varphi_m(\vec{r})$$

Bemerkungen:

a) Dgl.-System, linear, zur Bestimmung der $c_n(t)$ in $\Psi = \sum_n c_n(t)\varphi_n(\vec{r})$
mit Anfangsbedingg. ist vollständige Lösung gewonnen

b) $W \to 0 \quad \to \quad \Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\, \varphi_n(\vec{r})$

mit c_n = konstant f. stationäre Probleme $V_0(\vec{r})$

c) Störmatrix W bestimmt

- Energieverschiebungen $E_n \to E_n + W_{nn} \quad n = m$

- Kopplung zwischen c_n und c_m mit $n \neq m$ in W_{nm}
führt zu Übergängen zwischen stationären Zuständen $n \leftrightarrow m$

d) Mittelwert einer Observablen $\underline{O}$

$$\langle \underline{O} \rangle = \int d^3r \sum_n c_n^*(t)\, \varphi_n^*(\vec{r})\, \underline{O} \sum_m c_m(t)\, \varphi_m(\vec{r})$$

$$= \sum_{n,m} \underbrace{c_n^*(t)\, c_m(t)}_{\rho_{nm}(t)} \underbrace{\int d^3r\, \varphi_n^*(\vec r)\, \underline{O}\, \varphi_m(\vec r)}_{O_{nm}}$$

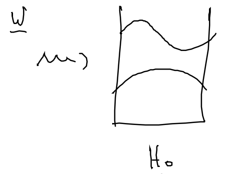
$$= \sum_{n,m} \rho_{nm}(t)\, O_{nm}$$

$\rho_{nn} = c_n^*(t)\, c_n(t)$ Wahrscheinlichkeit System in φ_n zu messen

$\rho_{nm} = c_n^*(t)\, c_m(t)$ Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen φ_n und φ_m (Optische Übergänge)

O_{nm} : WW-Stärke zwischen n und m (Optik: Auswahlregeln)

e) Quantenübergänge im Kasten (ÜA)



$W = -q\, \vec r \cdot \vec E_0 \cos(\omega_0 t)$

Wechselwirkung mit elektromagn. Welle

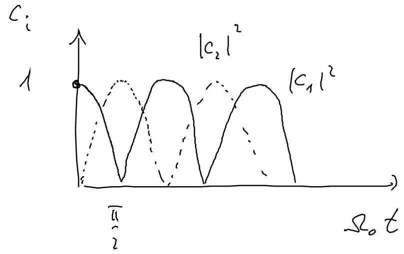
ω_0 Frequenz, q Ladung

$$\Psi = c_1(t)\, \varphi_1(\vec r) + c_2(t)\, \varphi_2(\vec r)$$

mit $\omega_0 \approx \omega_2 - \omega_1$

$|c_1(t)|^2 = \cos^2(\Omega_0 t)$, $|c_2(t)|^2 = \sin^2(\Omega_0 t)$, $\Omega_0 = \frac{\vec E \cdot \vec d_{12}}{\hbar}$

Rabifrequenz



Rabioszillationen im Zweiniveausystem