6.4. Wechselwirkung mit quantisiertem Lichtfeld

6.4.1. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Skizze: ① Wir definieren eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(A_i, \dot{A}_i) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \underline{A})^2\right)$

$i = 1,2,3$, [Lagrangefunktional $L = \int d^3r\, \mathcal{L}(A_i, \dot{A}_i)$]

liefert über Lagrange 2. Art die Wellengleichung. $\underline{A}$ ist das Vektorpotenzial

(I) $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0$ in Coulomb Eichung $\nabla \underline{A} = 0$

• das Hamiltonfunktional beschreibt die Energie des EM-Feldes

$$\boxed{H(A_i, \Pi_i) = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \underline{A})^2\right)}$$

wobei $\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}$ (sei $\phi = 0$, da keine freien Ladungen)

(kan. konjugierter Impuls $\Pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i}$)

② Modenentwicklung des $\underline{A}$-Feldes zum lösen der Wellengleichung (I)

(II) $A_i(\underline{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_\lambda c_\lambda A_i^\lambda(\underline{r})\, q_\lambda(t)$

Lösung der Oszillatorgleichung $\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2 = 0$

Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta \underline{A}^\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2}\underline{A}^\lambda = 0$ (z.B. Ansatz ebener Wellen)

(III) $\Pi_i(\underline{r}, t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_i^\lambda(\underline{r})\, p_\lambda(t) = -\varepsilon_0 E_i$

kan. konjugiertes Feld

(II), (III) einsetzen in Hamiltonfunktional: $\boxed{H = \frac{1}{2}\sum_\lambda p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2}$ [Bem. $\underline{A}^\lambda$ bilden ein ONS]

(nur noch Funktion der Zeit)

• Strahlungsfeld entspricht System aus unendlich vielen Oszillatoren

–> Quantisierung durch aufstellen von Vertauschungsrelationen

$[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_{\lambda'}] = i\hbar\,\delta_{\lambda\lambda'}$ [ergibt sich aus $q_\lambda(t) = \sqrt{\varepsilon_0}\, c_\lambda \int d^3r\, \underline{A}^\lambda(\underline{r})\, \underline{A}(\underline{r}, t)$]

③ Formulierung durch Erzeuger + Vernichtung

$\hat{c}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\, \hat{q}_\lambda + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\, \hat{p}_\lambda$ => $\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\left(\hat{c}_\lambda + \hat{c}_\lambda^+\right)$ "$\hat{=}$ $\underline{A}$-Feld"

$\hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}}\left(c_\lambda - c_\lambda^+\right)$ "$\hat{=}$ $\underline{E}$-Feld"

$$\boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

Photonenzahloperator $n_\lambda = \hat{c}_\lambda^+ \hat{c}_\lambda$

[ω_λ ergeben sich aus Lösung der Helmholtzgleichung]

Vertauschungsrelationen von $\hat{c}^+, \hat{c}$

$$[\hat{c}_\lambda, \hat{c}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{c}_\lambda, \hat{c}_{\lambda'}] = [\hat{c}_\lambda^+, c_{\lambda'}^+] = 0$$

→ Photonen haben Bosonen-Charakter

Zeitentwicklung von $\hat{c}$

$$\dot{\hat{c}}_\lambda = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, c_\lambda] = -i\omega_\lambda \hat{c}_\lambda$$

$c^+cc - c\underbrace{cc^+}_{1+c^+c}c$

$$\dot{\hat{c}}_\lambda^+ = i\omega_\lambda \hat{c}_\lambda^+$$

zurück zu den Feldern ergibt sich (und geeigneter Normierung)

$$\hat{A}_i = \sum_\lambda \tilde{A}_i^\lambda(\underline{r})\left(\hat{c}_\lambda + c_\lambda^+\right)$$

Feldoperator des Vektorfeldes und des E-Feldes

$$\boxed{\hat{E}_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\Pi}_i = \sum_\lambda i\omega_\lambda \tilde{A}_i^\lambda(\underline{r})\left(\hat{c}_\lambda - \hat{c}_\lambda^+\right)}$$

Falls nur eine Mode in x-Richtung betrachtet wird

$$A = \tilde{A}(r)\,\hat{c}_\lambda + \tilde{A}(r)\,c_\lambda^+$$

$$E = \hat{\mathcal{E}}(r)\,\hat{c}_\lambda + \tilde{\mathcal{E}}^*(r)\,c_\lambda^+ \qquad \text{mit } i\omega A = \mathcal{E}$$

pos. Frequenzanteil $\sim e^{-i\omega t}$

negativer Frequenzanteil $\sim e^{i\omega t}$

6.4.2. Quantenzustände des Lichtes

o.B.d.A betrachten wir einmodiges Feld mit $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)$

(Offset durch Energie des Vakuumzustandes, kann Null gesetzt werden)

[1] Fock Zustand: Eigenzustand von $\hat{n}$

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

Erzeugung durch n-maliges Anwenden von $\hat{c}^+$, $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{c}^+)^n|0\rangle$

Eigenschaften:

Mittelwert : $\langle n|\hat{n}|n\rangle = n$

Varianz : $\langle n|(\Delta\hat{n})^2|n\rangle = \langle(\hat{n}-n)^2\rangle$

$$= \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle c^+cc^+c\rangle - n^2 = 0$$

Photonzahl unterliegt keinen Schwankungen im Fock-Zustand

Feldstärkestatistik im Fock Zustand:

$\hat{E} = \mathcal{E}\hat{c} + \mathcal{E}^*\hat{c}^+$: Mittelwert $\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$

Varianz $\langle n|(\Delta\hat{E})^2|n\rangle = |\mathcal{E}|^2(2n+1)$ $\left(\langle n|\underbrace{c|n\rangle}_{\sqrt{n+1}|n+1} = 0\right)$

- Schwankung nimmt mit wachsender Photonenzahl zu
- im Vakuum verschwindet die Schwankung nicht

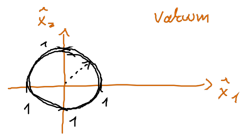
→ lebhafter Zustand

Darstellung in Quadraturkomponenten

(Real + Imaginärteil des Feldes)

$\hat{x}_1 = \hat{c} + \hat{c}^+$

$\hat{x}_2 = i(\hat{c} - \hat{c}^+)$



$\Delta\hat{x}_1 \Delta\hat{x}_2 \overset{\text{Vakuum}}{=} 1$

- Fock Zustand ist Amplitude fest und Phase unbekannt

→ maximal nicht klassisch

$\boxed{2}$ Glauber Zustände (kohärente Zustände)

Idee: beschreiben des "klassischen Zustandes" mit bekannter Phase als verschobenen Vakuumzustand

Ansatz: Eigenzustände von $\hat{c}$ sind Glauber Zustände $|\alpha\rangle$

$$\hat{c}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

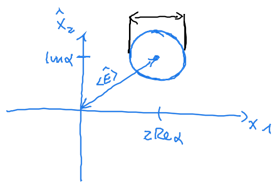
Entwicklung nach Fock Zuständen liefert $|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

Poisson Verteilung der Photonen auf Fock Zustände

Feldeigenschaften:

Mittelwert $\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle \neq 0$

Varianz $\langle\alpha|(\Delta\hat{E})^2|\alpha\rangle = |\mathcal{E}^2|$ entspricht Varianz des Vakuumzustandes



Phase + Amplitude bestimmbar bis auf Schwankungsbreite → kommt klass. Feld nahe

Photonenzahl: $\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \bar{n}$

$\langle\alpha|(\Delta\hat{n})^2|\alpha\rangle = \bar{n}$ → Photonzahl rauscht um $\bar{n}$ mit $\sqrt{\bar{n}}$

→ relative Schwankung verschwindet für große α

- nicht Null wie im Fock Zustand

$\boxed{3}$ Zustand des thermodynamischen Gleichgewichtes eines Photonen Ensembles

gegeben durch statistischen Operator $\hat{\varrho} = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{-\frac{\hbar\omega\, c^+ c}{kT}}$

• gemischter Zustand

$\langle (\Delta n)^2 \rangle_{therm} = tr\left[\hat{\varrho} (\Delta n)^2\right]$ hat gleiche Unschärfe wie im Fock Zustand

• mittlere Besetzung gegeben durch Bose-Einstein Verteilung