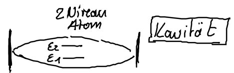
6.4.5. Atom in einer Kavität



Lichtmode mit Frequenz ω

c^+

Jaynes Cummings Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}}_{JC} = \underbrace{\hbar\omega\hat{c}^+\hat{c} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{12}\hat{\sigma}_z}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{c} + \hat{c}^+\hat{\sigma}_-)}_{\mathcal{H}_W}$$

<u>Atom Eigenzustände</u>

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

ε_2 — ω_{12} — ε_1

$\hat{\sigma}_+ = a_2^+ a_1$ [$= a_e^+ d_e^+ = p_e^*$

Vergleich mit Festkörper
Bandindex e
d_e^+ : Loch Erzeuger]

$\hat{\sigma}_- = a_1^+ a_2 = p_e$

$\langle\hat{\sigma}_z\rangle$: Inversion

<u>Eigenwerte</u>

$$E_n^{\pm} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\underbrace{\sqrt{\Delta^2 + (2g)^2(n+1)}}_{n\text{-Photonen Rabi-Frequenz } \Omega^n}$$

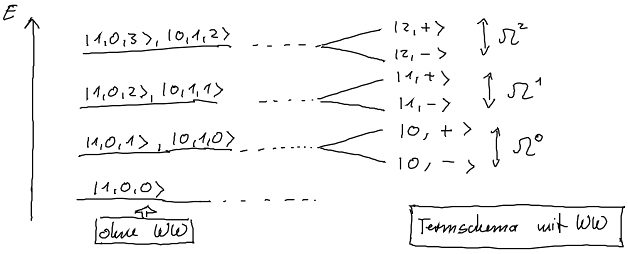
Detuning $\Delta = \omega_{12} - \omega$

↑

"dressed states"

- Eigenwerte durch WW verschoben

Eigen<u>zustände</u> für $\Delta = 0$:



"optischer Stark Effekt"

Zustände von $\mathcal{H}_0$:

$|1,0,0\rangle$

ein Elektron in ε_1; kein Elektron in ε_2; kein Photon

<u>Dynamische Entwicklung:</u>

<u>Lösungsmöglichkeiten</u>

$\boxed{1}$ Zeitentwicklung im Heisenberg-Bild

$$\dot{\hat{c}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_{JC}, \hat{c}]$$

- Vorteil: direkter Zugang
  - zur Inversion $\langle\hat{\sigma}_z\rangle = D(t)$
  - zu Korrelationsfunktion $G^{(2)}(\tau) = \langle\hat{c}^+(t)\,\hat{c}^+(t+\tau)\,\hat{c}(t)\,\hat{c}(t+\tau)\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{c}} &= -i\omega\hat{c} - ig\hat{\sigma}_- \\ \dot{\hat{\sigma}}_- &= -i\omega_{12}\hat{\sigma}_- + ig\,\hat{\sigma}_z\hat{c} \\ \dot{\hat{\sigma}}_z &= 2ig\,(\hat{c}^+\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+\hat{c}) \end{aligned}}$$

[$\hat{c}$ und $\hat{\sigma}$ vertauschen
$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z$
$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_-$]

- Vergleiche Bloch-Gleichungen aus 6.3
(Zusätzlich gibt es eine Gleichung für Feldoperatoren)

Inversion koppelt an Polarisation
Polarisation koppelt an Feld + Inversion

Lösung des DGL-Systems liefert

$\longrightarrow$

$$D(t) = \langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) \left(\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right)$$

Erwartungswert im Anfangszustand $\hat{\rho}$

keine Dynamik im Heisenbergbild

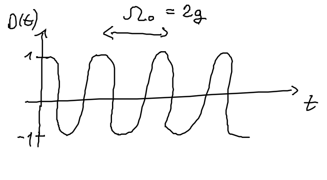
Anfangsbedingung für Photonen in der Mode "Quantenzustand des Lichtes" bei $t=0$

n-Photonen Rabi-Frequenz $\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$

1) WW mit Vakuum (leere Kavität, d.h. $n=0$)

$\rho_{nn}(0) = \delta_{n0}$

[falls $\Delta = 0$ (resonant)] $\longrightarrow$
$\omega_{12} - \omega = 0$



$$D(t) = \frac{1}{4g^2} 4g^2 \cos(2gt)$$

Atom oszilliert auch ohne treibendes Feld (im Kontakt mit Vakuum)

$\lightning$ zur klass. Theorie

Bemerkung: Vakuum besteht nicht nur aus einer Mode

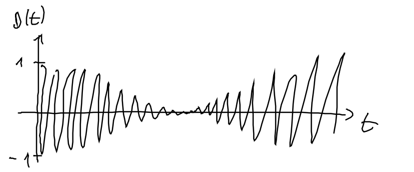
$\longrightarrow$ $\mathcal{H}_{JC}$ erweitern auf viele Moden

$\longrightarrow$ liefert Zerfall des Atoms (exp. Abfall von $D(t)$)

2) WW mit kohärentem Zustand

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}$$

(Glauber Zustand)



Collapse + Revival

- treten nur auf solange diskrete Verteilung der Photonen spürbar

klass. Grenzfall $n \to \infty$

$\longrightarrow$ Gauß-Verteilung

$\longrightarrow$ exp. Abfall für Inversion

$\boxed{2}$ Dichtematrixformalismus im WW-Bild zur Beschreibung der Dynamik

- Zeitentwicklung bzgl. $\mathcal{H}_W$ steckt in den Zuständen (in der Dichtematrix)

- reduzierte Dichtematrix $\hat{\rho}^{ph} = tr_{Atom}\, \hat{\rho}$ liefert Dichtematrix des Feldes

" " $\hat{\rho}^{A} = tr_{Feld}\, \hat{\rho}$ liefert Dichtematrix des Atoms

$$i\hbar \dot{\hat{\rho}}^{w} = [\mathcal{H}_W^{w}, \hat{\rho}^{w}]$$

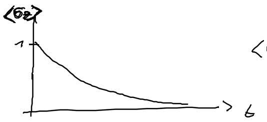
$$\mathcal{H}_W^{w} = e^{i/\hbar \mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_W e^{-i/\hbar \mathcal{H}_0 t}$$

- formelles Integrieren + iteratives Einsetzen + Abbruch nach z.B. 2. Ordnung (Störungstheorie)

- schwache Kopplung
- Markov – Annahme

$\longrightarrow$ Master Gleichung
DGL 1. Ordnung für $\hat{\rho}^A$
$\longrightarrow$ liefert Inversion des Atoms als Funktion der Zeit

- WW mit thermischem Photonreservoir (Vakuum)



$$\langle\sigma_z\rangle = \mathrm{tr}\, \hat{\rho}^A(t)\, \hat{\sigma}_z = \ldots = 2 e^{-Wt} - 1$$

leere Kavität der Temperatur T

W: Lebensdauer des Atoms

- Rücktrafo ins Heisenbergbild $\longrightarrow$ Korrelationsfunktionen des Atoms bestimmbar

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-W/2\,\tau}$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - e^{-W\tau} = \frac{\langle \sigma^+ \sigma_\tau^+ \sigma^- \sigma_\tau^- \rangle}{\langle \sigma^+ \sigma^- \rangle^2}$$

$g^{(2)}(\tau)=0$: Atom kann nicht sofort wieder ein zweites Photon emittieren (anti-bunching)

(Ende)

Zusammenfassung

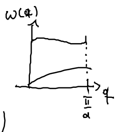
$\boxed{\text{1. Kristalle}}$

- Fourierentwicklung
- Festkörper mit Periodizitäten

$\boxed{\text{2. Quantenmechanische Beschreibung des Festkörpers}}$

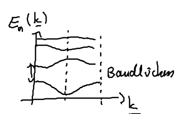
Schrödinger Gl. für Vielteilchensystem
Born – Oppenheimer Näherung

$\boxed{\text{3. Gittergleichung}}$



- Phononen (akt, opt)
- therm. Eigenschaften
- langwelliger Grenzfall (Elastostatik) (Phononen - Polaritonen)

$\boxed{\text{4. Elektronenzustände}}$



- Bloch Zustände (Kristallelektronen)
- Näherungen
  - fast freie Elektronen
  - Tight-binding Näherung
  - Hartree – Fock Näherung

5. Zweite Quantisierung

- Ein- und 2-Teilchen Hamiltonians, Erwartungswerte, Feldoperatoren für Wellenfkt.
- Modelle für Festkörperhamiltonian (ohne Phononen WW)
  - freie Elektronengas → Jellium Modell (pos. Ladungshintergrund)
  - Hubbard Modell (nur nächste Nachbar WW)
- WW Löcher + Elektronen → Exzitonen

6. Dynamische Effekte

- El.- Phonon WW (Polaronen)
  - attraktive e-e-WW (Supraleitung)
- Licht – Materie WW
  - semi-klass. → Bloch Gleichungen
  - voll quanten-statistisch (Feldoperatoren für E-Feld)
    - Korrelationsfunktionen
    - Jaynes Cummings Hamiltonian