Bemerkungen / Nachtrag zur Supraleitung

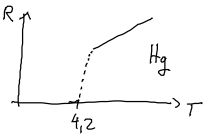
- Im allgemeinen ist Leitfähigkeit eines Festkörpers durch Streuprozesse der Elektronen gegeben (durch Impulsänderung wird Transport behindert)

  - man kann zeigen Widerstand $R(T) = R_0 + \alpha T^2 + b T^5$ T: Temperatur

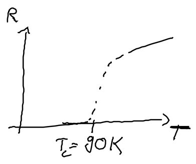
    αT^2: Elektron – Elektron Streuprozesse

    $b T^5$: Elektron – Phonon Streuprozesse

- Exp. Beobachtung



plötzlich fast verschwindender Widerstand



$YBa_2Cu_3O_{7-x}$

- Erklärung durch attraktive e–e–WW von 2 Elektronen
  (restliche Elektronen werden als Hintergrund betrachtet)

  - Ausgangspunkt : Fröhlich – Hamiltonian
    + Annahme nur ZWW Elektronen (k, k') mit $k' = -k$ also Gesamtimpuls $K = k + k' = 0$
    + Mean field Faktorisierung
    + Koordinatentransformation

    neue Quasiteilchen:

    $$\alpha_k = u_k\, a_{+k\uparrow} - v_k\, a^{+}_{-k\downarrow}$$

    (Elektron)

    $$\beta_k = u_k\, a_{-k\downarrow} + v_k\, a^{+}_{+k\uparrow}$$

$\hookrightarrow$ effektiver 1-Teilchen Hamiltonian

$$H_{eff} = \sum_k \sqrt{\varepsilon_k + |\Delta|^2}\,\left(\alpha_k^+ \alpha_k + \beta_k^+ \beta_k\right) + \sum_k \left(\varepsilon_k - \sqrt{\varepsilon_k^2 + |\Delta|^2}\right) + \frac{|\Delta|^2}{V}$$

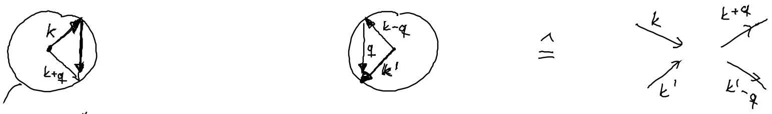
- wobei u_k, v_k so gewählt, dass α_k, β_k die fermionischen Vertauschungsrelationen erfüllen!

α_k, β_k sind Fermionen und nicht die Cooper Paare

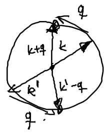
- $\Delta = V \sum_k \langle a_{-k\downarrow}\, a_{+k\uparrow} \rangle_{eff}$

  "Ordnungsparameter" muss selbstkonsistent bestimmt werden.

Streuung von 2 Elektronen (k, k') ← Ausgangszustände



Äquipotenzialfläche an der Fermikante (da dort leere Zustände existieren)



Falls $k' = -k$
also $K = 0$

sind viele q-Überträge möglich → größere Streuwahrscheinlichkeit

→ WW Hamiltonian $\sum_{k,q} a^{\dagger}_{k+q\sigma}\, a^{\dagger}_{-k-q\sigma}\, a_{-k}\, a_{k}$

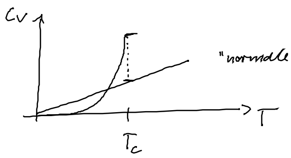
↓ BCS Hamiltonian:

$\sum_{k,k'} V_{kk'}\, a^{\dagger}_{k'\uparrow}\, a^{\dagger}_{-k'\downarrow}\, a_{-k\downarrow}\, a_{k\uparrow}$

Endzustand

- Cooper Paar wird gebildet aus beiden Anfangszuständen und ist ein Bosonisches Teilchen.

→ H_{eff} liefert Zustandssumme des Fermionenensembles und die Wärmekapazität



- exponentieller Anstieg und Sprung bei der krit. Temperatur T_c

6.2. Wechselwirkung mit Licht

6.2.1. Dichtematrix (statistischer Operator) und Verteilungsfunktionen

Quantenmechanisches Gemisch
(unvollständige Info über Mikrozustand)
d.h. Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i über mögliche Zustände $\langle \psi_i | \in \mathcal{H}^{Fock}$

$\sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

Mittelwerte $\langle \hat{M} \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_i \rangle$ mit $\sum_i P_i = 1$

$= \sum_j \sum_i P_i \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle$

$= \sum_j \langle \psi_j | \hat{\varrho} \hat{M} | \psi_j \rangle$

$\langle \hat{M} \rangle = tr(\hat{\varrho} \hat{M})$

Statistischer Operator ≙ Dichtematrix

$\boxed{\hat{\varrho} := \sum_i P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}$

wobei $tr\, \hat{\varrho} = 1$
$\hat{\varrho}^2 \neq \hat{\varrho}$ (gleich falls $\hat{\varrho}$ einen reinen Zustand beschreibt)
$tr\, \hat{\varrho}^2 < 1$
$\hat{\varrho}^{\dagger} = \hat{\varrho}$

QM Gemisch = inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

Bsp.: 1 Teilchen im 2 Niveau System : $\hat{\varrho} \hat{=} 2\times 2$ Matrix

<u>Liouville - von Neumann Gleichung</u> $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \varrho]$ (im Schrödingerbild), Zustände sind zeitabhängig $i\hbar|\dot{\psi}_i\rangle = \hat{H}|\psi_i\rangle$

<u>Bem</u>: ① Im Heisenbergbild steckt Dynamik in den Operatoren

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_H, \hat{A}_H] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H$$

② Physikalisch ist oft vor allem Dynamik der Mittelwerte (Messwerte) wichtig

Ehrenfest Theorem

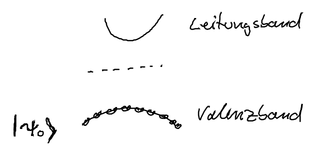
$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$ bildunabhängig!

<u>Verteilungsfunktion der Elektronen und Löcher</u>

Betrachte $\langle a_k^+ a_k\rangle$ $\hat{=}$ Mittelwert des Besetzungszahloperators im gemischten Zustand $\hat{\varrho} = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

mögliche Verteilung der Elektronen im Zustand k $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^F$ Vielteilchensystem

z.B. Halbleiter : Grundzustand bei $T=0$



$$\boxed{\langle a_k^+ a_k\rangle_{\hat{\varrho}}} = tr(\hat{\varrho}\, a_k^+ a_k)$$
$$= \sum_i p_i \underbrace{\langle\psi_i|a_k^+ a_k|\psi_i\rangle}_{n_k^i}$$

Besetzung des 1 Teilchen Zustandes k wenn System im Vielteilchenzustand $|\psi_i\rangle$ ist.

$n_k^i = 0, 1$

$$= \sum_i p_i n_k^i$$
$$= f_e(k)$$ <u>Elektronen Verteilungsfunktion</u>

Maximum von $f_e(k)$: $n_k^i = 1 \rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$

- $f_e(k)$ ist Wahrscheinlichkeit, ein Elektron bei k zu finden.
  - $\rightarrow$ im reinen Zustand $f_e(k) = 0$ oder 1
  - im Gemisch $0 \leq f_e(k) \leq 1$
  - im thermodynamischen Gleichgewicht ist $f_e(k)$ die Fermi - Funktion

· Analog $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k)$ Loch-Verteilungsfunktion

Erzeuger eines Defektelektrons (Loch)

· Bem. Falls Spin als Quantenzahl betrachtet wird $f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a^+_{ks} a_{ks} \rangle$

6.2.2. Semiklassische WW mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichungen der Elektronenverteilung beschreibbar durch Ham. Op. $\hat{H}_{opt}$
- Dipolkopplung an elektrisches Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ (z.B. Laserpuls)

$$\hat{H}_{opt} = e\hat{\underline{r}} \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$ mit qm. el. Dipoloperator

(halbklassisch: keine Feldquantisierung des Lichts)

Polarisation des Halbleiters

qm. Dipoldichte

$$\hat{\underline{P}}(\underline{r},t) = e\,\hat{\psi}^+(r,t)\,\underline{r}\,\hat{\psi}(\underline{r},t)$$

$\hat{\psi}^+, \hat{\psi}$ sind Feldoperatoren des Elektronensystems

Def.: makroskopische Polarisation $\underline{P}$ als Erwartungswert des Dipoloperators

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \langle \hat{\underline{P}} \rangle = \langle e\,\hat{\psi}^+(\underline{r},t)\,\underline{r}\,\hat{\psi}(\underline{r},t) \rangle$$

$$\hat{\psi}(\underline{r},t) = \sum_{n\underline{k}} a_{n\underline{k}}\, \psi_{n\underline{k}}(\underline{r})$$

Blochfunktion $\psi_{nk}(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\underline{r}} u_{nk}(\underline{r})$

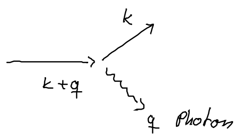
$$\hat{\underline{P}}(\underline{r},t) = \sum_{\substack{nk\\n'k'}} a^+_{n\underline{k}}\, a_{n'\underline{k}'}\, \psi^*_{n\underline{k}}(\underline{r})\, e\underline{r}\, \psi_{n'\underline{k}'}(\underline{r})$$

Fouriertrafo $$\hat{\underline{P}}(q,t) = \int d^3r\, \hat{\underline{P}}(\underline{r},t)\, e^{-i\underline{q}\underline{r}}$$

Def.: el. Dipolmatrixelement $$\mu_{nn'}(\underline{k},\underline{k}') = \frac{1}{V}\int d^3r\, u_{n\underline{k}}(\underline{r})\, e\underline{r}\, u_{n'\underline{k}'}(\underline{r})$$

⋮

$$\langle \hat{\underline{P}}(q,t) \rangle = \underline{P}(q,t) = -\sum_{nn'\underline{k}} \mu_{nn'}(\underline{k}) \langle a^+_{n\underline{k}}\, a_{n'\underline{k}+\underline{q}} \rangle$$



Näherung für opt. Grenzfall:

(1) $q \approx 0$ (Impuls der Photonen klein gegen Quasi-Impuls der Elektronen)

(2) Bandkantenoptik $\underset{\text{Photon}}{\hbar\omega} \approx \underset{\text{Bandlücke}}{E_G}$

→ nur Interbandübergänge (LB ⇄ VB)

Elektron-Loch-Bild:

$$\underline{P}(0,t) = \boxed{\underline{P}(t) = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu} \left(\langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \rangle + \langle a_{\underline{k}}^{+} d_{\underline{k}}^{+} \rangle \right)}$$

makroskop. Polarisation