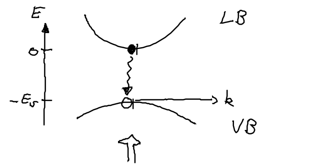
Fortsetzung 6.2.2. Semiklassische Wechselwirkung mit Licht

"Bandkantenoptik"



Mikroskopische Interbandpolarisation eines k-Zustandes

- $p(k,t) = \langle d_k a_k \rangle \quad [= tr(\hat{\varrho}\, d_k a_k)]$
- $p^*(k,t) = \langle a_k^+ d_k^+ \rangle$

Verteilungsfunktionen

- $f_e(k) = \langle a_k^+ a_k \rangle$
- $f_h(k) = \langle d_k^+ d_k \rangle$

Dynamische Größen des Festkörper-Elektronensystem

Dipolkopplung an das el.-magn. Feld:

Feldoperatoren des el. Systems

$$\hat{H}_{opt} = -\int d^3r\, \hat{\psi}^+(r,t)\, \underbrace{e\hat{\underline{r}}\, \underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{in Dipol-Näherung}}\, \hat{\psi}(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{V}\sum_q e^{iqr}\, \underline{E}(q,t)$$

$\downarrow$ analog zur Herleitung Hubbard-Ham. 5.5, e-ph-WW Ham. 6.1.

$$\boxed{\hat{H}_{opt} = \frac{1}{V}\sum_{\substack{\underline{k}\,\underline{q}\\ n,n'}} \underline{E}(q,t)\, a^+_{nk}\, a_{n'k+q}\, \underline{\mu}_{nn'}(k,q)}$$

Blochfaktor

$$\mu_{nn'}(k,q) = \frac{1}{V}\int d^3r\, u_{nk}(r)\, e\underline{r}\, u_{n'k+q}(r)$$

$n', n = \{VB, LB\}$

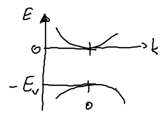
Bandkantenoptik $q \approx 0$

$$\hat{H}_{opt} = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu}\, \underline{E}(t)\, (\underset{n=LB}{a_k^+ d_k^+} + \underset{n=VB}{d_k a_k})$$

Absorption eines Photons

Emission eines Photons

6.3. Halbleiter-Bloch-Gleichungen



Zeitentwicklung der dynamischen Größen f_e, f_h, p, p^*
mit Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{opt} \left(+ \hat{H}_{e-ph} + \hat{H}_{e-e} \right)$ zunächst nicht mit betrachtet

Berechne Kommutatoren ① $[\hat{H}, a_k^+ a_k]$
② $[\hat{H}, a_k^+ d_k^+]$

$$\hat{H}_0 = \sum_k E_{LB}(k)\, a_k^+ a_k - \sum_k E_{VB}\, d_k^+ d_k$$

$E_{LB} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$ $\quad E_{VB} = -E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h}$

① $[\hat{H}_0, a_l^+ a_l] = \sum_k E_{LB}(k)\left(a_k^+ a_k a_l^+ a_l - a_l^+ a_l a_k^+ a_k\right) - \sum_k E_{VB}(\dots)$

$$= \sum_k \varepsilon_{LB}(k)\Big(-a_k^+ a_l^+ a_k a_l + a_l^+ a_k^+ a_l a_k + \delta_{kl}\, a_k^+ a_l - \delta_{kl}\, a_l^+ a_k\Big) - \sum_k \varepsilon_{VB}(\ldots)$$

$$\underline{= 0}$$ → keine Dynamik in der Besetzung durch $\hat{H}_0$

$$[\hat{H}_{opt}, a_l^+ a_l] = \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\Big(\big(a_k^+ d_k^+ a_l^+ a_l - a_l^+ a_l a_k^+ d_k^+\big) + \big(d_k a_k a_l^+ a_l - a_l^+ a_l d_k a_k\big)\Big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\Big(\big(-\delta_{lk}\, a_l^+ d_k^+ + \delta_{lk}\, d_k a_l\big)\Big)$$

$$= -\underline{\mu}\,\underline{E}\,\big(a_l^+ d_l^+ - d_l a_l\big)$$

Generation eines e-h Paares

Rekombination eines e-h Paares

$f_e = \langle a_l^+ a_l \rangle$

$$\Rightarrow \langle [\hat{H}_{opt}, a_k^+ a_k] \rangle = \boxed{-\underline{\mu}\,\underline{E}\,\big(p_k^*(t) - p_k(t)\big) = \frac{\hbar}{i}\dot{f}_k^e}$$

$p(k,t) = \langle d_k a_k \rangle = p_k(t)$

$p^*(k,t) = \langle a_k^+ d_k^+ \rangle = p_k^*(t)$

WW mit $\hat{H}_{opt}$ führt zur Ankopplung an die Polarisation

② Dynamik der Polarisation

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, d_k a_k] \rangle$$

Beiträge zum Kommutator

$$[\hat{H}_{opt}, d_l a_l] = \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\Big(\big(a_k^+ d_k^+ d_l a_l - d_l a_l a_k^+ d_k^+\big) + \underbrace{\big(d_k a_k d_l a_l - d_l a_l d_k a_k\big)}_{0}\Big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\big(a_k^+ a_l d_k^+ d_l - a_l a_k^+ d_l d_k^+ + 0\big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\big(a_k^+ a_l d_k^+ d_l - a_k^+ a_l d_k^+ d_l - \delta_{lk}\, d_l d_k^+ + \delta_{lk}\, a_k^+ a_l\big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E}\big(\delta_{lk}\, a_k^+ a_k + \delta_{lk}\, d_k^+ d_k - \delta_{lk}\delta_{kl}\big)$$

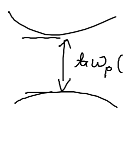
$$= \underline{\mu}\,\underline{E}\,\big(a_l^+ a_l + d_l^+ d_l - 1\big)$$

$$\left[\begin{array}{l} \{a_l^+, a_k^+\} = \{a_l, a_k\} = 0 \\ \{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl} \\ a_l^+ a_m = \delta_{lm} - a_m a_l^+ \end{array}\right]$$

$$\boxed{\frac{\hbar}{i}\dot{p}_k(t) = \langle [\hat{H}_{opt}, d_k a_k] \rangle = \underline{\mu}\,\underline{E}\,\big(f_k^e(t) + f_k^h(t) - 1\big)}$$

Elektronen im Leitungsband

− Elektronen im Valenzband



$\hbar\omega_p(k=0)$

Inversion "$f_e - (1 - f_h)$"

Polarisation getrieben durch (klass.) Lichtquelle!

$$[\hat{H}_0, d_l a_l] = \sum_k \Big\{E_{LB}(k)\big(a_k^+ a_k d_l a_l - d_l a_l a_k^+ a_k\big) - E_{VB}(k)(\ldots)\Big\}$$

$$= \sum_k \Big(-E_{CB}(k)\, \delta_{lk}\, d_l a_k - (-1)\, E_{VB}(k)\, \delta_{lk}\, d_k a_l \Big)$$

$$= -\underbrace{\big(E_{CB}(l) - E_{VB}(l) \big)}_{\hbar\omega_p(l)} d_l a_l$$

- freie Oszillation der komplexen Polarisation
- opt. Übergangsfrequenz $\omega_p(\underline{k}) = \frac{1}{\hbar} \left[E_{CB}(\underline{k}) - E_{VB}(\underline{k}) \right]$

Halbleiter-Bloch-Gleichungen

(1) $\frac{\partial}{\partial t} f^e_k(t) = \frac{1}{i} \Omega_p \left(p^*_k(t) - p_k(t) \right)$

(2) $\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \frac{1}{i} \omega_p(k)\, p_k(t) + \frac{1}{i} \Omega_p \left(1 - f_e - f_h \right)$

(3) $\frac{\partial}{\partial t} f^h_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} f^e_k(t)$

Rabi-Frequenz

$$\Omega_p = \frac{\mu E}{\hbar}$$

$$\underline{E} \xrightarrow[\text{erzeugt}]{(2)} p \xrightarrow[\substack{\text{generiert} \\ \text{durch WW} \\ \text{Ladungsträger}}]{(1)} f^e, f^h$$

- Bem.: • Kohärente Dynamik eines Ensemble unabhängiger durch klass. Lichtquelle getriebener 2-Niveau Systeme (Opt. Blochgln.)

  • Berücksichtigung von $\hat{H}_{e-e} = \hat{H}_{EL-EL} + \hat{H}_{D-D} + \hat{H}_{EL-D}$ (5.7.)
  (und $\hat{H}_{e-ph}$)

$$[\hat{H}_{EL-EL}, a_l^+ a_l] = \dots = \sum_{kq} \frac{V(q)}{2} \left\{ -a_k^+ a^+_{l-q}\, a_{k-q}\, a_l + a_l^+ a_k^+\, a_{l+q}\, a_{k-q} \right\}$$

$\langle [\hat{H}_{EL-EL}, a_l^+ a_l] \rangle$ enthält 2-Teilchen Korrelationen (e-e Streuamplituden)

$$y^{ee} = \langle a_k^+ a^+_{l-q}\, a_{k-q}\, a_l \rangle$$

Problem: Zeitentwicklung von y^{ee} würde durch zusätzliche DGL beschrieben → Ankopplung an noch höhere Korrelationen
→ unendliche Hierarchie von Gleichungen

mögliche Lösung: Abbruch durch Faktorisierung

z.B. $y^{ee} \approx \delta_{q,0} \langle a_k^+ a_k \rangle \langle a^+_{k'} a_{k'} \rangle$

$\quad - \delta_{k,k'+q} \langle a^+_{k'} a_{k'} \rangle \langle a_k^+ a_k \rangle$

$\approx (\delta_{q,0} - \delta_{k,k'+q})\, f^e_k(t)\, f^e_{k'}(t)$

→ Gleichungssystem schließt.