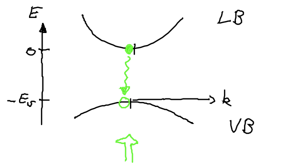
Fortsetzung 6.2.2. Semiklassische Wechselwirkung mit Licht

"Bandkantenoptik"



Mikroskopische Interbandpolarisation eines k-Zustandes

- $p(k,t) = \langle d_k a_k \rangle$ $\quad [:= tr(\hat{\rho}\, d_k a_k)]$
- $p^*(k,t) = \langle a_k^+ d_k^+ \rangle$

Verteilungsfunktionen

- $f_e(k) = \langle a_k^+ a_k \rangle$
- $f_h(k) = \langle d_k^+ d_k \rangle$

Dynamische Größen des Festkörper-Elektronensystems

Dipolkopplung an das el.-magn. Feld:

Feldoperatoren des el. Systems

$$\hat{H}_{opt} = -\int d^3r\, \hat{\psi}^+(r,t)\, \underbrace{e\hat{\underline{r}}\, \underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{in Dipol-Näherung}}\, \hat{\psi}(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{V}\sum_q e^{iqr}\, \underline{E}(q,t)$$

$\downarrow$ analog zur Herleitung Hubbard-Ham. 5.5,
" " e-ph-WW Ham. 6.1.

$$\boxed{\hat{H}_{opt} = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k,q\\ n,n'}} \underline{E}(q,t)\, a^+_{nk}\, a_{n'k+q}\, \underline{\mu}_{nn'}(k,q)}$$

Blochfaktor

$$\underline{\mu}_{nn'}(k,q) = \frac{1}{V}\int d^3r\, u_{nk}(r)\, e\underline{r}\, u_{n'k+q}(r)$$

$n',n = \{VB, LB\}$

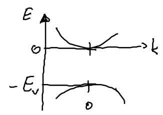
Bandkantenoptik $q \approx 0$

$$\hat{H}_{opt} = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu}\, \underline{E}(t)\, (\underbrace{a_k^+ d_k^+}_{n=LB} + \underbrace{d_k a_k}_{n=VB})$$

Absorption eines Photons

Emission eines Photons

6.3. Halbleiter-Bloch-Gleichungen



Zeitentwicklung der dynamischen Größen f_e, f_h, p, p^*
mit Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle = \langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\rangle$$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{opt}\ (+\ \hat{H}_{e-ph} + \hat{H}_{e-e})$ zunächst nicht mit betrachtet

Berechne Kommutatoren

① $[\hat{H}, a_k^+ a_k]$
② $[\hat{H}, a_k^+ d_k^+]$

$$\hat{H}_0 = \sum_k E_{LB}(k)\, a_k^+ a_k - \sum_k E_{VB}\, d_k^+ d_k$$

$$E_{LB} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \qquad E_{VB} = -E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h}$$

① $[\hat{H}_0, a_\ell^+ a_\ell] = \sum_k E_{LB}(k)\,(a_k^+ a_k\, a_\ell^+ a_\ell - a_\ell^+ a_\ell\, a_k^+ a_k) - \sum_k E_{VB}(\dots)$

$$= \sum_k E_{LB}(k) \Big(-a_k^+ a_l^+ a_k a_l + a_l^+ a_k^+ a_l a_k + \delta_{kl}\, a_k^+ a_l - \delta_{kl}\, a_l^+ a_k \Big) - \sum_k E_{VB} (\ldots)$$

$$\underline{= 0}$$

$\rightarrow$ keine Dynamik in der Besetzung durch $\hat{H}_0$

$$[\hat{H}_{opt}, a_l^+ a_l] = \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(\big(a_k^+ d_k^+ a_l^+ a_l - a_l^+ a_l a_k^+ d_k^+ \big) + \big(d_k a_k a_l^+ a_l - a_l^+ a_l d_k a_k \big) \Big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(\big(-\delta_{lk}\, a_l^+ d_k^+ + \delta_{lk}\, d_k a_l \big) \Big)$$

$$= -\underline{\mu}\,\underline{E} \left(a_l^+ d_l^+ - d_l a_l \right)$$

Generation eines e-h Paares

Rekombination eines e-h Paares

$f_e = \langle a_l^+ a_l \rangle$

$p(k,t) = \langle d_k a_k \rangle = p_k(t)$

$p^*(k,t) = \langle a_k^+ d_k^+ \rangle = p_k^*(t)$

$$\Rightarrow \langle [\hat{H}_{opt}, a_k^+ a_k] \rangle = \boxed{-\underline{\mu}\,\underline{E} \left(p_k^*(t) - p_k(t) \right) = \frac{\hbar}{i} \dot{f}_k^e}$$

WW mit $\hat{H}_{opt}$ führt zur Ankopplung an die Polarisation

② Dynamik der Polarisation

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, d_k a_k] \rangle$$

Beiträge zum Kommutator

$$[\hat{H}_{opt}, d_l a_l] = \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(\big(a_k^+ d_k^+ d_l a_l - d_l a_l a_k^+ d_k^+ \big) + \underbrace{\big(d_k a_k d_l a_l - d_l a_l d_k a_k \big)}_{0} \Big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(a_k^+ a_l d_k^+ d_l - a_l a_k^+ d_l d_k^+ + 0 \Big)$$

$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(a_k^+ a_l d_k^+ d_l - a_k^+ a_l d_k^+ d_l - \delta_{lk}\, d_l d_k^+ + \delta_{lk}\, a_k a_l^+ \Big)$$

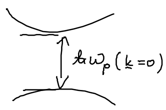
$$= \sum_k \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(\delta_{lk}\, a_k^+ a_k + \delta_{lk}\, d_k^+ d_k - \delta_{lk} \delta_{kl} \Big)$$

$$= \underline{\mu}\,\underline{E} \left(a_l^+ a_l + d_l^+ d_l - 1 \right)$$

$$\begin{bmatrix} \{a_l^+, a_k^+\} = \{a_l, a_k\} = 0 \\ \{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl} \\ a_l^+ a_m = \delta_{lm} - d_m^+ d_l \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\hbar}{i} \dot{p}_k(t) = \langle [\hat{H}_{opt}, d_k a_k] \rangle = \underline{\mu}\,\underline{E} \Big(\underbrace{\underbrace{f_k^e(t)}_{\text{Elektronen im Leitungsband}} + \underbrace{f_k^h(t)}_{-\text{ Elektronen im Valenzband}} - 1}_{\text{Inversion}} \Big)}$$

Inversion "$f_e - (1 - f_h)$"



Polarisation getrieben durch (klass.) Lichtquelle!

$$[\hat{H}_0, d_l a_l] = \sum_k \Big\{ E_{LB}(k) \left(a_k^+ a_k d_l a_l - d_l a_l a_k^+ a_k \right) - E_{VB}(k) (\ldots) \Big\}$$

$$= \sum_k \left(- E_{CB}(k)\, \delta_{\ell k}\, d_\ell d_k - (-1)\, E_{VB}(k)\, \delta_{\ell k}\, d_k a_\ell \right)$$

$$= -\underbrace{\left(E_{CB}(\underline{\ell}) - E_{VB}(\underline{\ell}) \right)}_{\hbar\omega_p(\underline{\ell})} d_\ell a_\ell$$

- freie Oszillation der komplexen Polarisation
- opt. Übergangsfrequenz $\omega_p(\underline{k}) = \frac{1}{\hbar}\left[E_{CB}(\underline{k}) - E_{VB}(\underline{k}) \right]$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Halbleiter - Bloch - Gleichungen}} \\ (1)\ \frac{\partial}{\partial t} f_k^e(t) = \frac{1}{i}\Omega_p \left(p_k^*(t) - p_k(t) \right) \\ (2)\ \frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \frac{1}{i}\omega_p(\underline{k})\, p_k(t) + \frac{1}{i}\Omega_p \left(1 - f_e - f_h \right) \\ (3)\ \frac{\partial}{\partial t} f_k^h(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_k^e(t) \end{array}}$$

Rabi - Frequenz

$$\Omega_p = \frac{\mu E}{\hbar}$$

$$\underline{E} \xrightarrow[\text{erzeugt}]{(2)} p \xrightarrow[\text{generiert durch WW Ladungsträger}]{(1)} f^e, f^h$$

- Bem: • Kohärente Dynamik eines Ensembles unabhängiger durch klass. Lichtquelle getriebener 2-Niveau Systeme (Opt. Blochgln.)
  - Berücksichtigung von $\hat{H}_{e-e} = \hat{H}_{EL-EL} + \hat{H}_{D-D} + \hat{H}_{EL-D}$ (und $\hat{H}_{e-ph}$) (5.7.)

$$\left[\hat{H}_{EL-EL}, a_\ell^+ a_\ell \right] = \dots = \sum_{kq} \frac{V(q)}{2} \left\{ -a_k^+ a_{\ell-q}^+ a_{k-q} a_\ell + a_\ell^+ a_k^+ a_{\ell+q} a_{k-q} \right\}$$

$\langle [\hat{H}_{EL-EL}, a_\ell^+ a_\ell] \rangle$ enthält 2 - Teilchen Korrelationen (e-e Streuamplituden)

$$y^{ee} = \langle a_k^+ a_{\ell-q}^+ a_{k-q} a_\ell \rangle$$

Problem: Zeitentwicklung von y^{ee} würde durch zusätzliche DGL beschrieben $\longrightarrow$ Ankopplung an noch höhere Korrelationen

$\rightarrow$ unendliche <u>Hierarchie</u> von Gleichungen

mögliche Lösung: Abbruch durch Faktorisierung

z.B. $y^{ee} \approx \delta_{q,0} \langle a_k^+ a_k \rangle \langle a_{k'}^+ a_{k'} \rangle$

$\quad - \delta_{k,k'+q} \langle a_{k'}^+ a_{k'} \rangle \langle a_k^+ a_k \rangle$

$\approx \left(\delta_{q,0} - \delta_{k,k'+q} \right) f_k^e(t)\, f_{k'}^e(t)$

$\rightarrow$ Gleichungssystem schließt.