Skalarprodukt in Komp.

$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b} = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = a_i b_i} \qquad (2.7)$$

Bilinearität
bzw (2.4)

in 2D:

$$\underbrace{(a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2)}_{\underline{a}}\cdot\underbrace{(b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2)}_{\underline{b}} \overset{\text{Bilinear}}{=} a_1 b_1 \underbrace{\underline{e}_1\cdot\underline{e}_1}_{1} + a_2 b_1 \underbrace{\underline{e}_2\cdot\underline{e}_1}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{\underline{e}_2\cdot\underline{e}_2}_{1}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

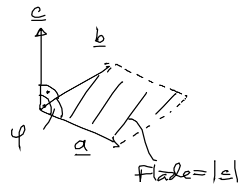
$$= (a_i \underline{e}_i)\cdot(b_j \underline{e}_j)$$

$$= a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j}_{\delta_{ij}}$$

$$= a_i b_i$$

2.1.2 Vektorprodukt (äußeres Produkt) Kreuzprodukt

- Geg. $\underline{a}, \underline{b}$



$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{c} := \underline{a}\times\underline{b} \quad \perp \underline{a}, \underline{b} \\ &|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\varphi \qquad (2.8) \\ &\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \ \ldots \text{bilden Rechtssystem} \\ &\qquad\quad \text{„} \qquad \text{„ Schraube} \end{aligned}}$$

- Bsp. „Momente": bezogen auf Pkt. im Raum

$\underline{r}\times\underline{a}$

(1) Drehimpuls eines Punktteilchens: $\underline{a} = \underline{p}$

$$\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}$$

(2) Drehmoment: $\underline{a} = \underline{F}$

$$\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F}, \quad \underline{M} = 0 \text{ für } \underline{r} \parallel \underline{F}$$

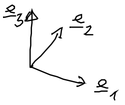
→ Mechanik

• $\underline{c}$ ... axialer oder Pseudovektor:

Raumspiegelung: $\left.\begin{array}{l} \underline{a} \longrightarrow -\underline{a} \\ \underline{b} \longrightarrow -\underline{b} \end{array}\right\}$ aber: $\boxed{\underline{c} \longrightarrow \underline{c}}$!

• Rechenregeln:
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a} \longrightarrow \underline{a}\times\underline{a} = 0 \\ (2) & \underline{a}\times(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}\times\underline{b} + \underline{a}\times\underline{c} \\ (3) & p\underline{a}\times\underline{b} = \underline{a}\times p\underline{b} = p(\underline{a}\times\underline{b}), \quad p\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \quad (2.9)$$

• orthonormierte Basis, Rechtssystem:



$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}_i \times \underline{e}_i = 0 \\ \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \\ \left.\begin{array}{l} \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \end{array}\right\} \text{zyklische Vertauschung} \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\underline{e}_k}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} \\ 1 & \text{für alle gerade Permutationen} \\ -1 & \text{" " ungerade "} \\ 0 & \text{sonst, d.h. mindestens 2 Indizes gleich} \end{cases}} \quad (2.11)$$

... vollständig antisymmetrischer oder Levi-Civita-Tensor

Permutationen: Vertausche 2 Indizes:

$$\varepsilon_{123} = 1 \xrightarrow{1\times} \varepsilon_{213} = -1 \xrightarrow{1\times} \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{123} \xrightarrow{2\times} \varepsilon_{312}$$

• $\underline{a}\times\underline{b}$ in Komponenten:

$$\underline{a}\times\underline{b} \underset{\text{Entw. (2.6)}}{=} (a_i\underline{e}_i)\times(b_j\underline{e}_j) = a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i\times\underline{e}_j}_{\varepsilon_{ijk}\underline{e}_k = \varepsilon_{kij}\underline{e}_k}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{a}\times\underline{b} = \varepsilon_{kij}\, a_i b_j\, \underline{e}_k \\ [\underline{a}\times\underline{b}]_k = \varepsilon_{kij}\, a_i b_j \end{array}} \quad (2.12)$$

also: $[\underline{a}\times\underline{b}]_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $[\underline{a}\times\underline{b}]_2 = \underbrace{a_3 b_1}_{\text{von } \varepsilon_{231}} - a_1 b_3$, ...

• Merkregel

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \_ + \_ + \_ - \_ - \_ - \_ \quad (2.13)$$

bestimme Determinante

• nützliche Rechenregeln:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl} \quad (2.14)$$

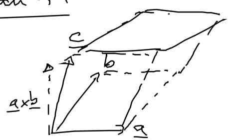
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b}) \quad (2.15)$$

Beweis: Übung

• Folie: Anwendungen

2.1.3 Spatprodukt

• Def: $\boxed{\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})}$ (2.16)



$|\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})| \mathrel{\hat{=}}$ Volumen des Spates $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$
[Grundfläche × Höhe]

$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) > 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ Rechtssystem
< 0, " " Linkssystem

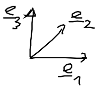
⟶ zyklische Eigenschaften: (2.17)

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{a}) = -\underline{c}\,(\underline{b}\times\underline{a}) \text{ etc.}$$

• Pseudoskalar: Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelung

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} \to -\underline{a} \\ \underline{b} \to -\underline{b} \end{array}\right\} \underline{a}\times\underline{b} \to \underline{a}\times\underline{b} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \underline{c} \to -\underline{c} \end{array}\right\} \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) \longrightarrow -\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})$$

• Orthonormalbasis:



$$\boxed{\underline{e}_i \cdot \underbrace{(\underline{e}_j \times \underline{e}_k)}_{\overset{(2.10)}{=}\,\varepsilon_{jkm}\,\underline{e}_m} = \varepsilon_{ijk}} \quad (2.18)$$

mit $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_m = \delta_{im}$ } ε_{jki}

• in Komponenten:

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = c_i\, a_j\, b_k\, \underbrace{\underline{e}_i\cdot(\underline{e}_j\times\underline{e}_k)}_{\varepsilon_{ijk}} = \varepsilon_{ijk}\, c_i\, a_j\, b_k$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

$$\overset{(2.17)}{=} \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})$$

2.2 Einschub: Matrizen (Details s. HM)

- Elemente aus $\mathbb{R}^{n\times m}$:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Komponenten von $\underline{\underline{A}}$: $A_{ij} = [\underline{\underline{A}}]_{ij} \in \mathbb{R}$

Zeile i, Spalte j

- Bsp: $n, m = 2$ $\quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

- Anwendungen: (i) Drehmatrizen ($\rightarrow$ Kap. 2.3)
  (ii) Darstellung von Tensoren 2. Stufe ($\rightarrow$ Kap. 4)
  (iii) lineare Gleichungssysteme ($\rightarrow$ Kap. 3)

- Rechenregeln:

$$\left.\begin{aligned} &(i) \quad [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}]_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \\ &(ii) \quad [p\underline{\underline{A}}]_{ij} = p A_{ij} \quad , p \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

$\longrightarrow$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzgl. Addition ($\rightarrow$ Kap. 2.4)

NB: Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}^{n\times m}$ möglich [QM]

- Def:

$\boxed{\text{transponierte Matrizen } \underline{\underline{A}}^t \text{ von } \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}}$

in Komponente $[\underline{\underline{A}}^t]_{ij} = A_{ji}$

in Matrixform:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & & \\ A_{k1} & & & & \\ A_{n1} & \cdots & & & A_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1k} & & & & \\ A_{1n} & \cdots & & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an Diagonale
- k. Zeile $\rightarrow$ k. Spalte

Bsp 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bsp 2: Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^{n\times m}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- Def: $\boxed{\text{Spur von } \underline{\underline{A}} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = A_{ii}, \quad \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}} \quad (2.23)$

2.2.1 Matrixmultiplikation

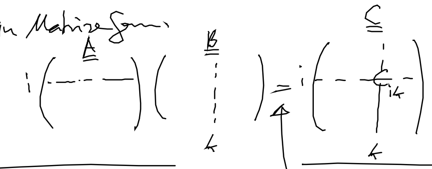
• Spezialfälle:

(i) $n = m$: $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(1) symbolisch: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(2) in Komponenten: $A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$

(3) in Matrizenform:



(2.24)

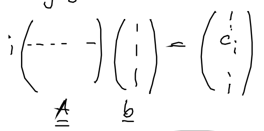
Bilde Skalarprodukt aus i-tem Zeilenvektor von $\underline{\underline{A}}$ mit k-tem Spaltenvektor von $\underline{\underline{B}}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\underline{b} \times \mathbb{R}^{m}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$

$A_{ij} b_j = c_i$ (2.25)



Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Anwendung: lineare Gleichungssystem: $\underline{b} = \underline{x}$ ... Variable

• allgemein $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{m\times r}$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{n\times r} \\ &\underbrace{A_{ij} B_{jk}}_{j=1\dots m} = C_{ik} \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

• im $\mathbb{R}^{n\times n}$:

(i) Einheitsmatrix: $[\underline{\underline{1}}]_{ij} = \delta_{ij}$

(ii) inverse Matrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$

(iii) invertierbare $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilden

Gruppe bzgl. Multiplikation

(A1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ... abgeschlossen

(A2) $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$ ... assoziativ

$A_{ij}(B_{jk}C_{kl}) = (A_{ij}B_{jk})C_{kl}$

(A3) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}}$ ... neutrales Element

$A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik}$

(A4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$ ... inverses Element

$A_{ij}A^{-1}_{jk} = \delta_{jk}$

Bem. zu (A1): $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

- <u>Achtung</u>: i.a. $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ ... <u>nicht</u> kommutativ

- weitere Regeln: (s. Übung)

(i) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^t = \underline{\underline{B}}^t\underline{\underline{A}}^t$ (2.30)

(ii) $Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = Sp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$ (2.31)