Anmeldung unter
tuport.sap.tu-berlin.de
vor 28.6.19

Nabla-Operator:

$$\boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i}} \quad (6.23)$$

kartesische Koordinaten:

$$\boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}} \quad (6.24)$$

6.5 Divergenz

Divergenz eines Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r}) \quad (6.34)$$

... Quellenfeld von $\underline{a}(\underline{r})$

kartes. Koord.:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \quad (6.35)$$

Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{r} = 3$

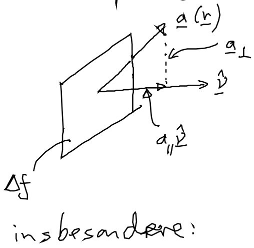
- Deutung: $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r})$ identifiziert lokal Quellen & Senken von Vektorfeldern = „Flüssen" (6.40)

Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$ ... Geschw.feld einer Flüssigkeit

aber auch $\underline{E}(\underline{r})$, nicht $\underline{B}(\underline{r})$, da $\operatorname{div} \underline{B}(\underline{r}) = 0$
„keine magnet. Monopole"

Motivation:

(1) Fluß durch Fläche mit Normale $\hat{\underline{\nu}}$ $(|\hat{\underline{\nu}}| = 1)$
und Größe Δf



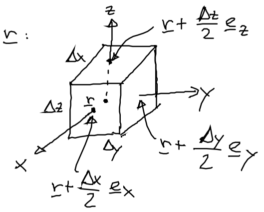
$a_\parallel \Delta f = (\underline{a} \cdot \hat{\underline{\nu}}) \Delta f$ ... tritt durch die Fläche

$\underline{a}_\perp \perp \hat{\underline{\nu}}$ nicht!

insbesondere: $\hat{\underline{\nu}} = \pm \underline{e}_x \longrightarrow a_\parallel = \pm a_x$

(2) Fluß aus kleinem Volumenelement $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$

um $\underline{r}$:



Aufgabe: Summe aller Flüsse aus ΔV hinaus!

Konvention: $\boxed{\hat{\underline{\nu}} \text{ zeigt } \underline{\text{immer}} \text{ aus } \Delta V \text{ hinaus}}$ (6.41)

Grund: $\underline{a}\cdot\hat{\underline{\nu}} > 0$ für Quelle

hier: $$q_x^{\pm} = \pm\, a_x\left(\underline{r} \pm \frac{\Delta x}{2}\underline{e}_x\right) \overset{\text{Taylor}}{=} \pm\left[a_x(\underline{r}) \pm \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}a_x\right]$$

$\hat{\underline{\nu}} = \underline{e}_x$, $\hat{\underline{\nu}} = -\underline{e}_x$

$$\left[f(\underline{r}+\Delta\underline{r}) = f(\underline{r}) + \underbrace{\Delta r_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\underline{r})}_{df}\right]$$

$$q_y^{\pm} = \pm\, a_y\left(\underline{r} \pm \frac{\Delta y}{2}\underline{e}_y\right) = \pm\left[a_y(\underline{r}) \pm \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial}{\partial y}a_y\right]$$

$$q_z^{\pm} = \ldots = \pm\left[a_z(\underline{r}) \pm \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial}{\partial z}a_z\right]$$

$\longrightarrow$ Fluß aus ΔV:

$$q(\underline{r})\,\Delta V = \left(q_x^+ + q_x^-\right)\Delta y\,\Delta z + \left(q_y^+ + q_y^-\right)\Delta x\,\Delta z + \ldots$$

$$= \left\{\left[\cancel{a_x(\underline{r})} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}a_x\right] - \left[\cancel{a_x(\underline{r})} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x}a_x\right]\right\}\Delta y\,\Delta z$$

$$+ \ldots\ \Delta x\,\Delta z + \ldots\ \Delta x\,\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z\right)\underbrace{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}_{\Delta V}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} q(\underline{r})\,\Delta V \text{ mit } q(\underline{r}) = \operatorname{div}\underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{a}(\underline{r}) \\ \text{mißt Fluß aus } \Delta V \text{ heraus} \end{array}}$ (6.43)

Fälle: (i) $q(\underline{r}) = 0$ ... „was rein fließt, fließt auch raus"

(ii) > 0 ... „es fließt mehr raus als rein"

$\hat{=}$ Quelle

(iii) < 0 ... Senke

Bsp: $\underline{v}(\underline{r}) = v_0\,\underline{r} \longrightarrow \operatorname{div}\underline{v} = 3v_0$ (6.44)

$\longrightarrow$ überall Quellen!

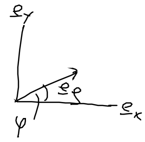
- Regeln: (1) $\underline{\nabla}\cdot(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{a} + \underline{\nabla}\cdot\underline{b}$

(2) $\underline{\nabla}\cdot\left[f(\underline{r})\underline{a}\right] = f(\underline{r})\,\underline{\nabla}\cdot\underline{a} + \underline{a}\cdot\underline{\nabla}f(\underline{r})$

Beweis in: kartes. Koordinatensystem ($\rightarrow$ Übungen)

- Zylinderkoordinaten:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r}) = \left(\underline{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(a_\varrho \underline{e}_\varrho + a_\varphi \underline{e}_\varphi + a_z \underline{e}_z \right)$$



Achtung: (i) $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{e}_\varrho = \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_\varphi,$

$$\longrightarrow \frac{1}{\varrho} a_\varrho$$

(ii) $\frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi = -\underline{e}_\varrho$, aber $\underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varrho = 0$!

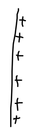
(iii) $\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_j = 0$ ... sonst

(6.46)

(6.46) und $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r}) &= \frac{\partial}{\partial \varrho} a_\varrho + \frac{1}{\varrho} a_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} a_z \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho a_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} a_z \end{aligned}} \quad (6.47)$$

Bsp: (1) $\underline{E}(\underline{r}) \sim \underbrace{-\frac{1}{\varrho}}_{a_\varrho} \underline{e}_\varrho$ ... Feld eines geladenen Drahtes



$$\longrightarrow \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) \sim \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} = 0, \quad \varrho \neq 0$$

(2) $\underline{v}(\underline{r}) = \underbrace{\omega \varrho}_{a_\varphi} \underline{e}_\varphi \longrightarrow \operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \omega \varrho}{\partial \varphi} = 0$

- Kugelkoordinaten: $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\vartheta \underline{e}_\vartheta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r}) &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r} a_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \tan\vartheta} a_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta \, a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}} \quad (6.48)$$

Beweis: „Übungen!"

Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{r} = \underbrace{r}_{a_r} \underline{e}_r = \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{2}{r} r = 3!$ [vgl. (6.36)]

6.6 Rotation

• **Def:** Rotation eines Vektorfeldes $\underline{a}(\underline{r})$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{a}(\underline{r})} \quad (6.49)$$

... Wirbelfeld von $\underline{a}(\underline{r})$

• kartesische Koordinaten:

$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad \underline{a}(\underline{r}) = a_i \underline{e}_i \quad$, x_i, $i = x,y,z$

$$\longrightarrow \quad \underline{\nabla}\times\underline{a}(\underline{r}) = \left(\underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times\left(a_j(\underline{r})\,\underline{e}_j\right)$$

mit $\underline{e}_i\times\underline{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\underline{e}_k$ (2.10)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_j = 0\right] \quad = \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(r)\,\varepsilon_{ijk}\,\underline{e}_k$$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$
$i \to j$
$j \to k$
$k \to i$

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{\nabla}\times\underline{a}(\underline{r}) &= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j\right)\underline{e}_k \quad &(6.50)\\
[\underline{\nabla}\times\underline{a}]_x &= \frac{\partial}{\partial y}a_z - \frac{\partial}{\partial z}a_y\\
[\underline{\nabla}\times\underline{a}]_y &= \frac{\partial}{\partial z}a_x - \frac{\partial}{\partial x}a_z\\
[\underline{\nabla}\times\underline{a}]_z &= \frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x
\end{aligned}} \quad (6.51)$$

• **Deutung I:** $\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{a}(\underline{r}) \text{ identifiziert lokal Wirbel von Vektorfeldern}}$ (6.52)

Bsp. 1: $\quad \underline{v} = \underline{\omega}\times\underline{r}$ (6.53) [s. Kap. 6.2]

... Prototyp eines Wirbels im Geschw.feld

$\underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}$ ... Wirbelstärke (6.54)

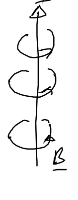
Beweis: $\quad \mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$!!

Hilfsformel: $\quad \underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$
& $\underline{\nabla}\ \underline{r}$

$$= \underline{\omega}\,\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{r})}_{3} - \underbrace{\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{r}}_{\omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix} = \underline{\omega}}$$

$$= 3\underline{\omega} - \underline{\omega} = 2\underline{\omega} \quad \text{qed}$$

Bsp 2: Strom-Leiter



$\mathrm{rot}\,\underline{B} \sim I$ (6.55)

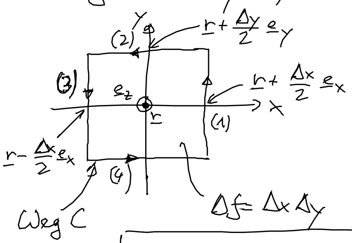
(Maxwell-Gl. !!)

· Deutung II:

Ziel: Verdeutlichung Maß für Wirbel von $\underline{a}(\underline{r})$ um Flächenelement Δf

(i) Orientierte Fläche = Flächenelement Δf mit Normalenvektor $\hat{\underline{\nu}}$ $(|\hat{\underline{\nu}}|=1) \longrightarrow \Delta \underline{f} = \Delta f\, \hat{\underline{\nu}}$

hier: $\Delta f = \Delta x \Delta y$, $\quad \hat{\underline{\nu}} = \hat{\underline{e}}_z$

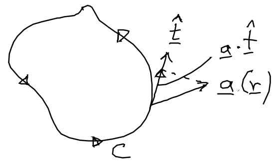


(ii) Konvention: $\boxed{\text{Wähle Weg } C \text{ um } \Delta f \text{ mit Rechter-Hand-Regel}}$

hier: $\hat{\underline{\nu}} = \underline{e}_z$, $\quad C = (1) \longrightarrow (2) \rightarrow (3) \longrightarrow (4)$

(iii) Zirkulation/Wirbel:

> Summiere Tangentialkomp. $\underline{a} \cdot \hat{\underline{t}}$ von $\underline{a}(\underline{r})$ entlang C
>
> $\underline{t}$ ... Tangentialvektor an C, orientiert wie C



hier:
$$\Big[\underbrace{a_y\big(\underline{r} + \tfrac{\Delta x}{2}\underline{e}_x\big)}_{\underline{a}\cdot\underline{e}_y\ (1)} - \underbrace{a_y\big(\underline{r} - \tfrac{\Delta x}{2}\underline{e}_x\big)}_{\underline{a}\cdot(-\underline{e}_y)\ (3)}\Big]\Delta y$$
$$+ \Big[\underbrace{a_x\big(\underline{r} - \tfrac{\Delta y}{2}\underline{e}_y\big)}_{\underline{a}\cdot\underline{e}_x\ (4)} - \underbrace{a_x\big(\underline{r} + \tfrac{\Delta y}{2}\underline{e}_y\big)}_{\underline{a}\cdot(-\underline{e}_x)\ (2)}\Big]\Delta x$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \Big[\cancel{a_y(\underline{r})} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x} a_y - \cancel{a_y(\underline{r})} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial}{\partial x} a_y\Big]\Delta y$$
$$+ \Big[\cancel{a_x(\underline{r})} - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial}{\partial y} a_x - \cancel{a_x(\underline{r})} - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial}{\partial y} a_x\Big]\Delta x$$
$$= \Big(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x\Big)\Delta x \Delta y = \underbrace{(\mathrm{rot}\, \underline{a})_z}_{(\mathrm{rot}\,\underline{a})\cdot\underline{e}_z} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\Delta f}$$

beliebige Orientierung von Δf $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Verwirbelung/Zirkulation um } \Delta f \\ (\mathrm{rot}\,\underline{a}) \cdot \Delta \underline{f} = \mathrm{rot}\,\underline{a} \cdot \hat{\underline{\nu}}\, \Delta f\end{array}} \quad (6.57)$$