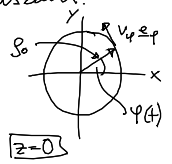
5.3 Bahnkurven

(i) gerade Bahn: $\underline{r}(t) = \underline{v}t + \underline{r}_0$ (5.16)

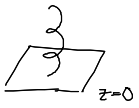
(ii) Kreisbahn:



$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{\rho_0} t = \omega t \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

ω: Kreisfrequenz

(iii) Helix



$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{\rho_0} t = \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

- Teilchengeschw.

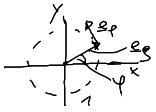
$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon} \quad (5.19)$$

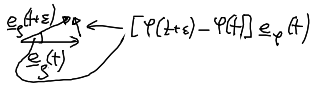
(iv) Bsp: (1) (5.15)/(5.16): $\underline{r}(t) = \underline{v}t + \underline{r}_0 \longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}$ (5.20)

Abl. der Komp.

(2) (5.17): $\underline{r}(t) \overset{z=0}{=} \rho_0 \underline{e}_\rho \longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}_0}_{0} \underline{e}_\rho + \rho_0 \dot{\underline{e}}_\rho$

$\dot{\underline{e}}_\rho$: (i) Überlegung





$$\dot{\underline{e}}_\rho = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{e}_\rho(t+\varepsilon) - \underline{e}_\rho(t)}{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega} \underline{e}_\varphi$$

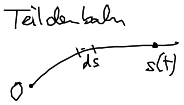
(ii) Rechnen:

$$\underline{e}_\rho \overset{(5.9)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{\underline{e}}_\rho = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$$

$$\longrightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \rho_0 \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega} \underline{e}_\varphi \overset{(5.17)}{=} v_\varphi \underline{e}_\varphi \quad (5.21)$$

(3) (5.18): $\underline{r}(t) = \rho_0 \underline{e}_\rho + v_z t\, \underline{e}_z \xrightarrow{(5.21)} \frac{d\underline{r}}{dt} = v_\varphi \underline{e}_\varphi + v_z \underline{e}_z$ (5.22)

- Bogenlängen-Darstellung



$ds = \underbrace{v}_{|\underline{v}|} dt$ ... zurückgelegte Weglänge in dt (5.23)

$$\longrightarrow s(t) = \int_0^{s(t)} ds' = \int_0^t v(t')\, dt'$$

$= s'\big|_0^{s(t)}$

... zurückgelegte Weglänge zur Zeit t = Bogenlänge (5.24)

Bahnkurve, Umkehrung von $s(t)$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t(s)) = \underline{r}(s) \quad (5.25)$$

[physikal. Notation! $\underline{r}(t)$, $\underline{r}(s)$ ... dieselbe Bahn, unterschiedliche Funktionen]

Bilde:

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

Kettenregel; $\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}(t)$, $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d\underline{r}}{ds} = \hat{\underline{t}}\,, \quad |\hat{\underline{t}}| = 1} \quad (5.26)$$

... Tangentialvektor

NB: neben t oder s sind andere Kurvenparameter möglich: Bsp. $\omega t = \varphi$

6. Vektoranalysis

- Motivation:
  räumliche Veränderung von physikal. Größen
  $\longrightarrow$ Differenzieren/Ableiten
  $\triangleq$ Erkunden lokaler Veränderungen

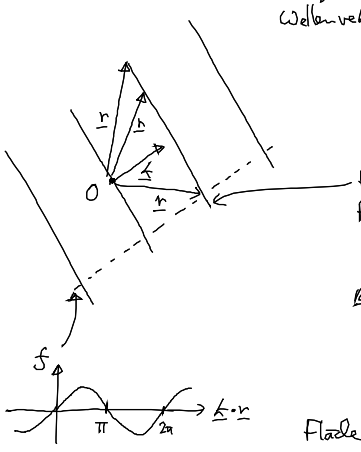
6.1 Skalarfelder

- Skalarfeld $f(\underline{r})$: ordnet jedem Raumpunkt $P[(x_1, x_2, x_3)$ oder $\underline{r}]$ ein Skalar $\in \mathbb{R}$ zu.

  Bsp: Temp. T, Druck p (in einer Flüssigkeit)
  Massendichte ϱ (z.B. in der Atmosphäre),
  potentielle Energie U, ...

- Bsp:
  (1) ebene Welle: $f(r) \sim \sin(\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r}}_{\text{Phase}})$

  $\underline{k}$: Wellenvektor (z.B. Schallwellen in Flüssigkeiten, Festkörpern)



Führe ein
Fläche konstanter Phasen
$\underline{k}\cdot\underline{r} = \text{konst.} \perp \underline{k}$!

Bsp: $\underline{k} = k\underline{e}_x \longrightarrow \underline{k}\cdot\underline{r} = kx$

$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$

Fläche mit $f = 0$: $\underline{k}\cdot\underline{r} = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

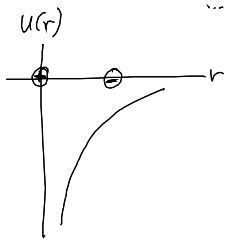
(2) kugelsymmetrisches (Potential)feld: $U = U(r)$ (6.2)

r: Kugelkoord., Abstand vom Nullpkt.

„Äquipotential"fläche:
$U(r) = \text{konst.} \longrightarrow r = \text{konst.}$
$\triangleq$ Kugelfläche um $r=0$

Bsp: $U(r) \sim \frac{1}{r}$ (6.3)

... potentielle Energie einer Test{masse / ladung} im Feld {einer Masse / einer Pkt.ladung}



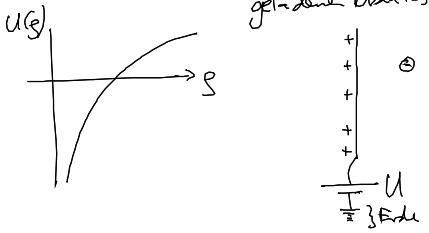
(3) zylindersymmetrisches (Potential)feld: $U = U(\varrho)$ (6.4)

ϱ: Zyl. koord., Abstand von z-Achse

„Äquipotential"fläche: $U(\varrho) = \text{konst.} \longrightarrow \varrho = \text{konst.}$
$\triangleq$ Zylinderfläche um z-Achse

Bsp: $U(\varrho) \sim \ln \varrho$ (6.5)

... pot. Energie einer Testladung im Feld eines unendlich langen, homogen geladenen Drahtes

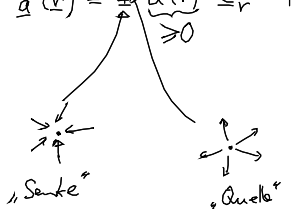


6.2 Vektorfelder

- Vektorfeld $\underline{a}(\underline{r})$: ordnet jedem Raumpkt. P einen Vektor $\in V_p$ zu.
  Bsp: Kraft $\underline{F}$, Geschwindigkeit (z.B. in Flüssigkeit)
  elektr. ($\underline{E}$) / magnet. ($\underline{H}$) Feld ...

- Bsp:
  (1) kugelsymmetr. (Quellen-/Senken-) Feld:

$$\underline{a}(\underline{r}) = \pm \underbrace{a(r)}_{\geq 0} \underline{e}_r \quad (6.6)$$

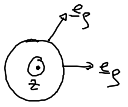


Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^2}\,\underline{e}_r$ (6.7)

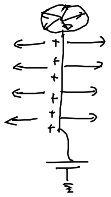
... (i) E-feld einer Pkt. ladung
(ii) Kraft auf Test {masse / ladung} im Feld {eines Massepktes / einer Pktladg}

(2) zylindersymmetr. Feld:

$\underline{a}(\underline{r}) = a(\varrho)\,\underline{e}_\varrho$ (6.8)



Bsp: $\underline{a}(\underline{r}) \sim \frac{1}{\varrho}\,\underline{e}_\varrho$



... (i) E-Feld eines hom. geladenen Drahtes
(ii) Kraft ($q\underline{E}$) auf Testladg im Feld eines hom. gelad. Drahtes

(3) (zylindersymm.) Wirbelfeld („Vortex")

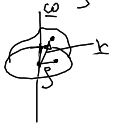
$\underline{v}(\underline{r}) = f(\varrho, z)\,\omega\,\underline{e}_\varphi$

Flüssigkeiten, Tornados, Magnetfelder

Bsp1: $\underline{v}(\underline{r}) = \omega\varrho\,\underline{e}_\varphi$ mit $|\underline{v}| = \omega\varrho$!

$\hat{=} \underline{\omega} \times \underline{r}$

„Wirbelstärke", hier $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$



Beweis: $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$, $\underline{r} = \varrho\,\underline{e}_\varrho + z\,\underline{e}_z$

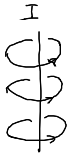
mit $\underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0$

$\underline{e}_z \times \underline{e}_\varrho = \underline{e}_\varphi$

$\rightarrow \underline{\omega} \times \underline{r} = \omega\varrho\,\underline{e}_\varphi$ qed

Bsp. 2: $\underline{H}(\underline{r}) \sim \frac{I}{\varrho}\,\underline{e}_\varphi$ (6.12)

... Feld eines mit Strom I durchflossenen Leiters

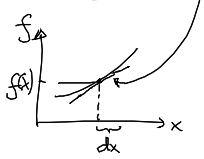


6.3 Vollständiges Differential einer Funktion in 3D

- **1D** Einmal: Geg $f(x)$

  Wert in Nachbarschaft von x: Taylorentwicklung!

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x) + \frac{df}{dx}\,dx}_{\text{Gerade}} + \underbrace{O(2)}_{\text{Terme } (dx)^n,\ n\geq 2} \qquad (6.13)$$



Def: vollständiges Differential:

$$df(x) = \frac{df}{dx}\,dx \qquad (6.14)$$

$$\xrightarrow{(6.13)} \quad f(x+dx) - f(x) = df + O(2) \qquad (6.15)$$

- **3D** Geg: $f(x_1, x_2, x_3)$

  Wert in Nachbarschaft von $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$f(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2,\ x_3+dx_3) \overset{\text{mit (6.13) sukzessive}}{=}$$

$$= \underbrace{f(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2,\ x_3)}_{\vdots} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\substack{x_1+dx_1\\ x_2+dx_2\\ x_3}} dx_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1 x_2 x_3} dx_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1 x_2 x_3} dx_2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\substack{x_1+dx_1\\ x_2, x_3}} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\,dx_2}_{O(2)} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_1, x_2, x_3}$$

$$\longrightarrow \quad f(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2,\ x_3+dx_3) - f(x_1, x_2, x_3)$$

$$= df + O(2) \qquad (6.16)$$

Def: vollständiges Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i \qquad (6.17)$$

NB: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_j,\, j\neq i}$