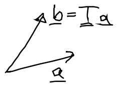
4. Tensoren 2. Stufe

4.2 Definitionen & dyadisches Produkt

- Def:

$$\underline{\underline{T}}: \quad \underline{a} \longmapsto \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \qquad (4.1)$$



Linearität: $\underline{\underline{T}}\,(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\,\underline{\underline{T}}\,\underline{b}$

- Wirkungsweise in Komp.:

$$T_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \qquad (4.4)$$

$$b_i = T_{ij}\, a_j \qquad (4.5)$$

- Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underbrace{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}_{\text{Basis in } V \times V \text{ (Produktraum)}} \qquad (4.6)$$

- dyadisches Produkt:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

1. Bilinearität $\quad \underline{a} \otimes \underline{b} \overset{\text{Exp}}{=} (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j)$

$$= a_i b_j \,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \qquad (4.7)$$

2. $(\underline{a} \otimes \underline{b})\,\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V$

Vgl.: Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b}$

Kreuzprodukt: $\underline{a} \times \underline{b}$

- Konsistenz?

$$(4.4) \longrightarrow T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \overset{(4.6)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j$$

$$\overset{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k)(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j) \underset{\text{Lin.}}{\overset{(4.1)}{=}} T_{kl}\, \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}}\, \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}} = T_{ij} \;\checkmark$$

$\longrightarrow$ (4.4) und (4.6) sind konsistent unter (4.7)!

- Komponenten $\underline{a} \otimes \underline{b}$:

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{e}_j \overset{(4.7)}{=} (\underline{e}_i \cdot \underline{a})\,(\underline{b} \cdot \underline{e}_j)$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j} \qquad (4.8)$$

4.3 Spezielle Tensoren (wie bei Matrizen)

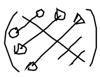
- transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{b} &:= \underline{b}\cdot\underline{\underline{T}}^t\underline{a} \\ \xrightarrow[\underline{b}=\underline{e}_i]{\underline{a}=\underline{e}_j}\quad T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}} \qquad (4.9)$$

vgl. Matrizen Gl. (2.22)!

- allg. Tensor 2. Stufe: $n=3 \longrightarrow 3\times 3 = 9$ unabh. Komp.

(i) symmetrischer Tensor 2. Stufe: $\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = T_{ij}}$ (4.10)



... 6 unabh. Komp.

$T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

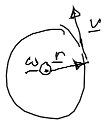
$T_{12} = T_{21}$ etc.

(ii) antisymmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}} \qquad (4.11)$$

... 3 unabh. Komp.: T_{12}, T_{13}, T_{23}

Bsp: $\underline{v} = \underline{\omega}\times\underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r}$ $\qquad \varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123} = -1$



mit $\Omega_{ij} = (\underline{\omega}\times)_{ij} = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}+\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}-\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{antisymmetrisch}} \end{aligned}} \qquad (4.12)$$

- Einheitstensor: $\boxed{\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j}$ (4.13)

denn: $\underline{e}_i\cdot\underline{\underline{1}}\,\underline{e}_j = \underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$!

4.4 Algebra (wie bei Matrizen)

- Addition: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ (4.14)
- skalare Multiplikation: $\underline{\underline{C}} = p\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\,A_{ij}$, $p\in\mathbb{R}$ (4.15)
- Multiplikation von Tensoren:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \\ &\neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \end{aligned}} \qquad (4.16)$$

Beweis: $C_{ij} = \underline{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\underset{\underline{\underline{1}}}{\downarrow}\underline{\underline{B}}\,\underline{e}_j$

$= \underline{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\,(\delta_{kl}\,\underline{e}_k\otimes\underline{e}_l)\,\underline{\underline{B}}\,\underline{e}_j$

$\vdots$

$$= A_{ik} B_{kj}$$

- Inverser Tensor: $\underline{\underline{T}}^{-1}$: $\quad \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik} (T^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$ (4.17)
- Spurbildung: $\quad Sp\,\underline{\underline{T}} = T_{ii}$ (4.18)

4.5 Drehungen

- Erinnerung [Kap. 2.3]: $\quad \{\underline{e}_i\} \longrightarrow \{\underline{e}_i'\}$ mit $\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j$ (2.32)

$$\left.\begin{array}{l} D_{ij} D_{kj} = \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{1}} \end{array}\right\} \quad (2.33)$$

- aktiver Standpunkt:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehter}} R\underline{\underline{T}} := T_{kl}\, \underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$

$$= T_{kl} \underbrace{D_{ki} D_{lj}}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\xrightarrow{\text{in } \{\underline{e}_i\}} \boxed{\begin{aligned} [R\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl} D_{ki} D_{lj} \\ &= D^t_{ik} D^t_{jl} T_{kl} \end{aligned}} \quad (4.19)$$

- passiver Standpunkt: $\quad \underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_i'\}$

also: $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\, \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkomp.:

$$T_{ij}' \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j'$$

$$= T_{kl} \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j'}_{D_{jl}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \\ \xrightarrow{\text{zeige!}} \quad T_{ij} &= D^t_{ik} D^t_{jl} T_{kl}' \end{aligned}} \quad (4.20)$$

4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

- Motivation: „Tensor begreifen"

QM: Operator $\longrightarrow$ Meßgrößen!

- i.f.: $n = 3$! alles reell
- Eigenwertproblem des Tensors / der Matrix $\underline{\underline{T}}$: bzgl. ONB

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a}} \quad (4.21)$$

Suche $\underline{a}$ so, daß $\underline{\underline{T}}\,\underline{a} \parallel \underline{a}$!

λ … Eigenwert (EW) zu $\underline{a}$ … Eigenvektor (EV)

- **Bsp:** Drehimpuls starrer Körper

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \longrightarrow \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}^{(i)} = \theta^{i}\,\underline{\omega}^{(i)}$$

$$\longrightarrow \underline{L} \parallel \underline{\omega}^{(i)}! \longrightarrow \text{stabile Rotation}$$

- Bestimmung: (4.21) $\longrightarrow$ $\boxed{(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})\,\underline{a} = \underline{0}}$ (4.22) … homogenes LGS!!

Kap. 3: (4.22) besitzt nichttriviale Lsg. $\underline{a} \neq 0$ falls $(\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{1}})^{-1}$ nicht existiert

$$\boxed{\det[\underline{\underline{T}} - \lambda\underline{\underline{1}}] = 0 = \begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{3}-\lambda \end{vmatrix}} \quad (4.23)$$

… charakteristisches Polynom von $\underline{\underline{T}}$

= kubische Gl. für λ

$\longrightarrow$ 3 Lösungen = EW: $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ [i.a. 1 reelle & 2 komplexe Lsg.]

mit EV: $\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}$

- Berechnung: (i) systematisch
  1. Löse (4.23) $\to \lambda^{(i)}$
  2. Löse (4.22) mit $\lambda^{(i)} \longrightarrow \underline{a}^{(i)}$

  (ii) Rate $\underline{a}^{(i)} \xrightarrow{(4.21)} \lambda^{(i)}$

Bsp:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} \underline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \lambda^{(1)} = 1 \\ \underline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \lambda^{(2)} = 2 \\ \underline{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \lambda^{(3)} = 0 \end{array}$$

- Satz: $\boxed{\text{Falls reelles } \underline{\underline{T}} \text{ symmetrisch} \longrightarrow \lambda^{(i)} \in \mathbb{R}}$ (4.24)

Beweis:
$$\left.\begin{array}{l|l} \underline{a}^{*}\cdot & \underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a} \\ \underline{a}\cdot & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{*} = \lambda^{*}\,\underline{a}^{*} \end{array}\right\} \ominus$$
$*$ … komplex konjugiert

$$\underbrace{\underline{a}^{*}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{a}}_{\underline{\underline{T}}^{t}} - \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{*} \underset{\underline{\underline{T}}^{t}=\underline{\underline{T}}}{=} 0 = \underbrace{(\lambda-\lambda^{*})}_{2\,\mathrm{Im}\,\lambda}\,\underbrace{\underline{a}^{*}\cdot\underline{a}}_{\neq 0} \longrightarrow \lambda = \lambda^{*} \text{ qed}$$

- **Satz:** $\boxed{\text{Die EV eines reellen symmetrischen } \underline{\underline{T}} \text{ sind orthogonal: } \underline{a}^{(i)}\cdot\underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}}$

Beweis: (1) $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$
$$\left.\begin{array}{l|l} \underline{a}^{(j)}\cdot & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)}\,\underline{a}^{(i)} \\ \underline{a}^{(i)}\cdot & \underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(j)} = \lambda^{(j)}\,\underline{a}^{(j)} \end{array}\right\} \ominus$$

$$\text{mit } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{t} \longrightarrow 0 = (\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)})\,\underline{a}^{(i)}\cdot\underline{a}^{(j)} \xrightarrow[\lambda^{(i)}\neq\lambda^{(j)}]{i\neq j} \underline{a}^{(i)} \perp \underline{a}^{(j)}$$

(2) Entartung: $\lambda^{(i)} = \lambda^{(j)}$

(i) isotroper Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$

(ii) axial-symmetrischer Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$, Richtung $\underline{a}^{(3)}$ ausgezeichnet

} Wähle orthogonale EV im (i) 3-dim. (ii) 2-dim. Entartungsraum

• Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in EV-Basis $\{\underline{a}^{(i)}\}$:

<u>Ges</u> $\underline{\underline{T}} = T'_{ij}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)}$

mit $\underline{\underline{T}}\, \underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)}$, $\underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}$

$$\longrightarrow \quad T'_{ij} \overset{(4.4)}{=} \underline{a}^{(i)} \cdot \underbrace{\underline{\underline{T}}\, \underline{a}^{(j)}}_{\lambda^{(j)} \underline{a}^{(j)}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T'_{ij} &= \lambda^{(i)} \delta_{ij} \\ \underline{\underline{T}}' &= \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{T}} &= \sum_i \lambda^{(i)}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \end{aligned}} \qquad (4.27)$$

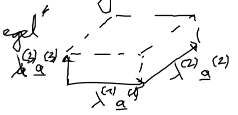
... Diagonalgestalt

• Trafo der Tensorkomp. auf $\{\underline{a}^{(i)}\}$:

$$\left.\begin{aligned} D_{ij} &= \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{e}_j \\ T'_{ij} &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$

• graphische Darstellung von $\underline{\underline{T}}$:

(1) „Ziegel"



(2) Ellipsoid: Halbachse $\parallel \underline{a}^{(i)}$ mit Länge $\lambda^{(i)}$

} Tensor besitzt Orientierung im Raum!

5. Euklidischer Raum

• Motivation:

(1) Grundlage der Newtonschen Mechanik

$\boxed{\text{Physikal. Anschauungsraum} = \text{euklidischer Raum} = \text{flacher Raum}}$

⟶ euklidische Geometrie gilt:

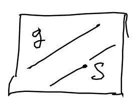
<u>Bsp:</u> a) Winkelsumme im Dreieck = 180°

(nicht auf der Kugel:

)

b) Satz von Pythagoras

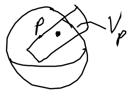
c) Parallelenaxiom:



(2) Unterschiede:

Physikal. Anschauungsraum A mit Punkten P und Vektorraum V_P („Tangentialraum"), angeheftet an jeden Pkt P, in dem die physikal Vektoren

– gekrümmter Raum:
Absolut wichtig zum Verständnis der ART



– flacher Raum: A & V_P bilden affinen Raum [s. Kap. 5.1]