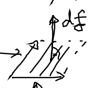
7.2 Flächenintegrale

Fluß von $\underline{a}(\underline{r})$ durch Fläche F:

$$\boxed{Q = \int_F \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f} \quad \text{mit Flächenelement} \quad d\underline{f} = df\, \underline{\nu}} \quad (7.11)$$

Normalenvektor auf Fläche bei $\underline{r}$ mit $|\underline{\nu}| = 1$

- Punkt auf Fläche F: $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$



$$\boxed{\begin{aligned} d\underline{f} &= d\underline{r}_u \times d\underline{r}_v \\ &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du\, dv \end{aligned}} \quad (7.16)$$

$$\xrightarrow{\text{in (7.11)}} \boxed{Q = \int_F \underline{a}(\underline{r}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du\, dv} \quad (7.17)$$

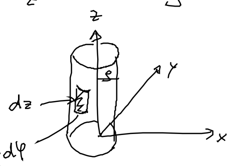
... Doppelintegral (s. HM)

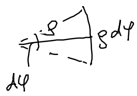
- Bsp für $d\underline{f}$:

(1) Fläche ∥ xy-Ebene: $(u,v) = (x,y) \longrightarrow d\underline{f} = \underline{e}_z\, dx\, dy$

(2) Zylinderoberfläche um $\underline{e}_z$ mit Radius ϱ:

$(u,v) = (\varphi, z)$





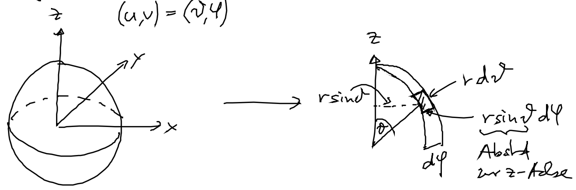
$$\underline{r} = \varrho\, \underline{e}_\varrho + z\, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varrho = \text{konst.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} &= \varrho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\, \underline{e}_\varphi \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_z \end{aligned}\right\} \quad d\underline{f} \overset{(7.16)}{=} \varrho \underbrace{\underline{e}_\varphi \times \underline{e}_z}_{\underline{e}_\varrho} d\varphi\, dz \longrightarrow \boxed{d\underline{f} = \underline{e}_\varrho\, \varrho\, d\varphi\, dz} \quad (7.18)$$

... $d\underline{f}$ auf Zyl. oberfläche

(3) Kugeloberfläche um $\underline{r}=0$ mit Radius r:

$(u,v) = (\vartheta,\varphi)$



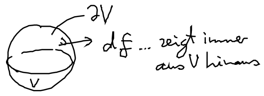
$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\boxed{\begin{aligned} d\underline{f} &= \underline{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= -\underline{e}_r\, r^2\, d\cos\vartheta\, d\varphi \end{aligned}}$ (7.19a)

$d\cos\vartheta = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

... $d\underline{f}$ auf Kugeloberfläche

- geschlossene Fläche ∂V um Volumen V

$$\boxed{\int_{\partial V} \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f}} \quad (7.20)$$



... Fluß aus V heraus

- Bsp: Oberfläche einer Kugel mit Radius r:

nimm $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{e}_r$!

$$\longrightarrow \partial V = \int_{\partial V} \underline{e}_r \cdot d\underline{f}\,\underline{e}_r = \int_{\partial V} df$$

$$\overset{(7.19a)}{=} \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\overset{(\text{hier})}{=} r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 2\pi r^2 \int_{1}^{-1} -d\cos\vartheta = 2\pi r^2 \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta = 2\pi r^2 \cos\vartheta \Big|_{-1}^{1}$$

$$\partial V = 4\pi r^2 !$$

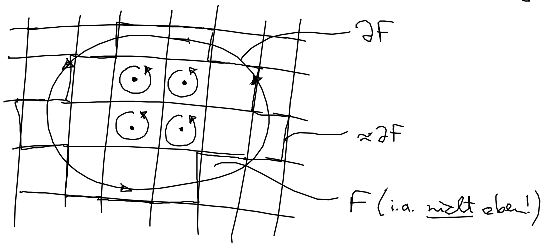
7.3 Satz von Stokes

- Satz:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für Fluß von rot } \underline{a} \text{ durch Fläche F gilt:} \\ \displaystyle\int_F \text{rot}\,\underline{a} \cdot d\underline{f} = \oint_{C=\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{r} \\ \qquad \text{... Zirkulation von } \underline{a} \text{ entlang Randkurve } \partial F \text{ von F} \\ \text{wichtig: (1) rot } \underline{a} \text{ definiert auf ganz F} \\ \qquad\quad\; \text{(2) Umlaufsinn von } C=\partial F \text{ über Rechte-Hand-Regel für } d\underline{f} \text{ von F} \end{array}}$ (7.21)

• Beweis:

1. Nähere F durch „viele" gleichorientierte Rechtecke i: ⟲ $\Delta f^{(i)}$



2. $\int_F \mathrm{rot}\,\underline{a}\cdot d\underline{f} \approx \sum_{i\ [\text{über Rechtecke}]} \mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\cdot \Delta \underline{f}^{(i)}$

3. Kap 6.6, Deutung II:

$$\mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\cdot \Delta \underline{f}^{(i)} = \underbrace{„\oint \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}"}_{\text{Zirkulation um Rechteck } i}$$

4. benachbarte Flächenelemente i & j:

i j

$$d\underline{r}^{(i)} = -d\underline{r}^{(j)} \longrightarrow \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)} + \underline{a}\cdot \underbrace{d\underline{r}^{(j)}}_{-d\underline{r}^{(i)}} = 0$$

also: in $\sum_i \mathrm{rot}\,\underline{a}\cdot \Delta \underline{f}^{(i)} = \sum_i „\oint_{⟲} \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}"$

nur „freiliegende" Kurventeile der ⟲

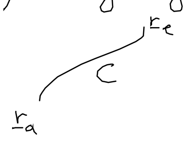
tragen bei $\longrightarrow$ Rand $C = \partial F$

$$\longrightarrow \sum_i „\oint_{⟲} \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}" \longrightarrow \oint_{\partial F} \underline{a}\cdot d\underline{r} \quad \text{qed}$$

• Anwendung:

(1) $\underline{F} = -\mathrm{grad}\,U$ ... Kraftfeld

a) beliebiger Weg:



$$\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_C \underbrace{\mathrm{grad}\,U\cdot d\underline{r}}_{dU\ (6.21)}$$

$$= -\int_C dU = -U(\underline{r})\Big|_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} = -\left[U(\underline{r}_e) - U(\underline{r}_a)\right]$$

b) geschlossener Weg: $\underline{r}_a = \underline{r}_e \longrightarrow \oint_{C=\partial F} \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0!$ (7.22)

c) $\mathrm{rot}\,\underline{F} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = 0$ (6.60)

$$\longrightarrow \int_F \mathrm{rot}\,\underline{F}\cdot d\underline{f} = 0^{(7.23)} \xrightarrow[(7.22)]{\text{mit}} \text{Stokes ok.}$$

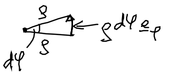
(2) Achtung: $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{g_0}{\rho}\,\underline{e}_\varphi$

a) $\mathrm{rot}\,\underline{v} = 0, \quad \underline{r} \neq 0$

$\longrightarrow \int_F \mathrm{rot}\,\underline{v} \cdot d\underline{f}$ nicht berechenbar falls $\underline{r} = z\,\underline{e}_z \in F$!

b) $C = \partial F$: Kreis um z-Achse mit $\rho = $ konst.

$$\int_{C=\partial F} \underline{v}(\underline{r}) \cdot \underbrace{d\underline{r}}_{\rho\,\underline{e}_\varphi d\varphi} = \int \frac{g_0}{\rho}\,\underline{e}_\varphi \cdot \rho\,\underline{e}_\varphi\, d\varphi$$



$$= g_0 \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi g_0 \neq 0 \;!!$$

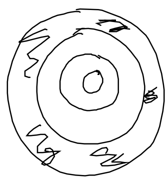
7.4 Volumenintegrale

• Motivation: Gesamtmasse M der Erde?

Schalenstruktur

(i) unterschiedliches Material

(ii) Inhomogenitäten in der Schale



$$\longrightarrow M \approx \sum_i \underbrace{m(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Masse von} \\ \text{Vol. } \Delta V_i \text{ am} \\ \text{Ort } \underline{r}_i}} = \sum_i \underbrace{\rho(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Massendichte} \\ \text{Skalarfeld!}}} \Delta V_i$$

für genauere Berechnung: $\Delta V_i \longrightarrow dV \longrightarrow 0$

• Def.:

Volumenintegral über Skalarfeld $f(\underline{r})$ im Volumen V $$\iint_V f(\underline{r})\, dV \xleftarrow{\Delta V_i \to dV} \sum_{\text{"}i \in V\text{"}} f(\underline{r}_i)\, \Delta V_i$$

(7.24)

NB: (1) $f(\underline{r})$ ... Dichte

(2) $f(\underline{r})$ ... (kartesische) Komp. eines Vektorfeldes

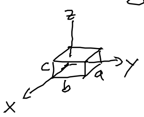
• kartesische Koordinaten:

$\boxed{dV = dx\,dy\,dz}$ (7.25)

... Volumen eines infinitesimal kleinen Quaders

Bsp: (1) Berechne Vol. eines Quaders mit Kantenlänge a, b, c

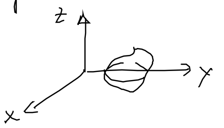
$\longrightarrow f(\underline{r}) = 1$



$$V_Q = \int_{V_Q} dV = \underbrace{\int_{z=0}^{c}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a} dx\,dy\,dz}_{\text{3-fach Integral!}}$$

$$\overset{\text{„faktori-}}{\underset{\text{siert hier"}}{=}} \underbrace{\int_{z=0}^{c} dz \int_{y=0}^{b} dy \int_{x=0}^{a} dx}_{\text{Produkt von 3 1D Integrale}} = abc \checkmark$$

(2) komplizierter Rand ∂V von $V \longrightarrow$ HM



• beliebige Koord. x_1, x_2, x_3:

(1) Koord.trafo: $\underline{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{kartesische}} = \begin{pmatrix} x(x_1, x_2, x_3) \\ y(\;"\;\;"\;) \\ z(\;"\;\;"\;) \end{pmatrix}$ (7.26)

(2) Welches Volumenelement gehört zu $dx_1\,dx_2\,dx_3$

Bsp: $dr\,d\vartheta\,d\varphi$ ... Einheit Länge! nicht Volumen

$\longrightarrow$ Vorfaktor ??