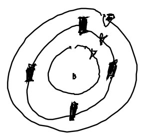
Beispiel 3: $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{g_0}{\rho}\, \underline{e}_z \times \underline{e}_\rho = \frac{g_0}{\rho}\, \underline{e}_\varphi$ (6.58)

o.B. $\mathrm{rot}(\underline{v}) = 0 \quad \underline{r} \neq 0$ [s. Übungen]

Deutung:



(Siehe hier Applet auf Materialseite)

- Zylinder- / Kugelkoordinaten: $\mathrm{rot}(\underline{a})$ berechenbar
- Regeln:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad \underline{\nabla} \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{\nabla} \times \underline{a} + \underline{\nabla} \times \underline{b} \\ &(2) \quad \underline{\nabla} \times [f(\underline{r})\underline{a}] = f(\underline{r})\, \underline{\nabla} \times \underline{a} + [\underline{\nabla} f(\underline{r})] \times \underline{a} \end{aligned}\right\} \quad (6.59)$$

Beweis: in kartesischen Koord.

- wichtige Anwendungen: Details s. Kursvorlesungen

(1) Gradientenfelder sind Wirbelfrei:

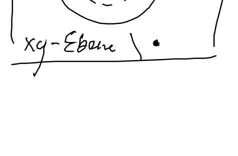
Satz:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Geg:} \quad U(\underline{r}) \ \ldots \ \text{Skalarfeld (2x stetig diffbar)} \\ \qquad\quad\ \underline{a}(\underline{r}) \ \ldots \ \text{Vektorfeld} \\ \text{im einfach zusammenhängenden Gebiet} \\ \text{dann gilt} \quad \underline{a}(\underline{r}) = \mathrm{grad}(U) \Leftrightarrow \mathrm{rot}(\underline{a}) = 0 \end{array}} \quad (6.60)$$

(i) einfach zusammenhängend:
alle geschl. Kurven lassen sich auf Pkt. zusammenziehen.

Bsp. 1: ja

Bsp 2: nein



(ii) Beweis: „$\Rightarrow$"

$$[\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}U)]_x = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}}_{=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}}\Big)\, U(r) = 0$$

Satz von Schwarz

$$[\ldots]_y = [\ldots]_z = 0$$

ebenso!

„$\Leftarrow$": hier nicht!

(iii) Mechanik: $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad}(U)$!!

(iv) Ausnahme: $U \sim \ln(\rho) \Rightarrow \underline{a} \sim \frac{1}{\rho}\underline{e}_\rho$ mit $\operatorname{rot}(\underline{a}) = 0$

Vorsicht: nicht einfach zusammenhängend wegen $\rho = 0$

(2) Satz:

$$\boxed{\operatorname{div}(\underline{B}) = 0 \Leftrightarrow \underline{B} = \operatorname{rot}(\underline{A})} \quad (6.61)$$

E-Dynamik! Wirbelfelder sind Quellenfrei!

(3) Laplace-Operator:

$$\boxed{\underline{\nabla}^2 = \Delta = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}} \quad (6.62)$$

Bsp: Quellen eines Gradientenfeldes: $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U)$

(i) Potentialtheorie (E-Dynamik, Mechanik)

(ii) QM

Kartesische Koord.

$$\boxed{\underline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \quad (6.63)$$

(4) Hauptsatz der Vektoranalysis:

„Quellen & Wirbel bestimmen $\underline{a}(\underline{r})$ eindeutig"

$$\underline{a}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{a}_t(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div}(\underline{a}_t)=0 \\ \text{Wirbel}}} + \underbrace{\underline{a}_l(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{rot}(\underline{a}_l)=0 \\ \text{Quellen}}} + \underbrace{\underline{a}_R(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div}(\underline{a}_R)=\operatorname{rot}(\underline{a}_R)=0 \\ \text{für Randbedingungen}}}$$

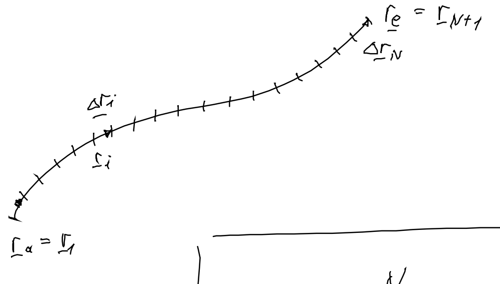
$$\mathrm{rot}(\underline{a}) = \mathrm{rot}(\underline{a}_t), \quad \mathrm{div}(\underline{a}) = \mathrm{div}(\underline{a}_L) \tag{6.64}$$

7. Integration von Feldern

- verschiedene Typen: Linien-/ Flächen-/ Volumenintegrale
  1D 2D 3D
- HM genaue Def., Berechnung
- hier: (1) anschauliche Definition
  [Integrale = Summe über kleine Terme.]
  (2) Auswahl von Integralen
  (3) physikal. Einsichten (oft) ohne Rechnung
  (4) Satz von Stokes & Gauß

7.1. Linien-/ Wegintegrale

- Bahnkurve C:



Differenzenvektor:
$$\boxed{\underline{r}_e - \underline{r}_a = \sum_{i=1}^{N} \Delta\underline{r}_i \xrightarrow[\Delta\underline{r}_i \to d\underline{r}]{N\to\infty} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} d\underline{r}} \tag{7.1}$$

• Berechnung mit Parameterdarstellung von C: (s. Kap. 5.3)

(1) Zeit t: $\underline{r} = \underline{r}(t)$, $\quad d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}(t)\ (5.15)} dt \qquad (7.2)$

$$\Rightarrow \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(t_e) - \underline{r}(t_a)$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \underline{v}(t)\, dt \qquad (7.3)$$

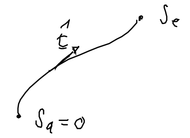
in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \ \& \ (7.3) \Rightarrow \text{drei 1D Integrale}$$

(2) Bogenlänge s: $\underline{r} = \underline{r}(s)$ $\quad d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\underline{\hat{t}},\ |\underline{\hat{t}}| = 1\ (5.26)} ds \qquad (7.4)$

$$\Rightarrow \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(s_e) - \underline{r}(s_a)$$

$$= \int_{s_a = 0}^{s_e} \underline{\hat{t}}(s)\, ds \qquad (7.5)$$



• Integrale des Types:

$$\boxed{W = \int_C \underbrace{\underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}} \qquad (7.6)$$

„Tangentialkomponente von $\underline{a}$ an C mal $ds = |d\underline{r}|$"

[vgl. Wirbel !!]

Bsp: von Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ verrichtete Arbeit entlang C

$$\boxed{W = \sum_i^N \underbrace{\underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\substack{\text{Kraftkraftkomp in} \\ \text{Wegrichtung mal Weg}}} \xrightarrow{\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r}} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}} \qquad (7.7)$$

Berechnen: (1) Zeitdarstellung $\quad W \overset{(7.2)}{=} \int_{t_a}^{t_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{v}(t)\, dt}$

Funktion von t
$\Rightarrow$ 1D Integral

(2) Bogenlängendarstellung:

$$W \overset{(7.4)}{=} \int_{s_a}^{s_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(s)) \cdot \underline{t}^1(s)}_{\text{Funktion von } s \;\Rightarrow\; \text{1D Integral}} ds$$

Bsp: $\underline{F}(\underline{r}) = k\underline{r}$ ... 3D Federkraft

Weg von $r_a = 0$ entlang $\underline{r} = x\underline{e}_x$ nach $\underline{r}_e = x_e \underline{e}_x$

$\Rightarrow s = x$

$$\left.\begin{aligned} \underline{F}(\underline{r}(s)) &= kx\underline{e}_x \\ d\underline{r} &= \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\underline{t}^1} ds = \underline{e}_x dx \end{aligned}\right\} \quad \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = kx\,dx$$

$$\Rightarrow W = \int_{x=0}^{x_e} dx\, kx = \frac{k}{2} x^2 \Big|_0^{x_e} = \frac{k}{2} x_e^2$$

- geschlossene Kurve C:

$$\boxed{\oint_C \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad \text{... Zirkulation}} \qquad (7.10)$$

NB: vgl. Deutung von $\mathrm{rot}(\underline{a})$ in Kap. 6.6 Gl. (6.56)

7.2 Flächenintegrale

- Typ der Integrale:

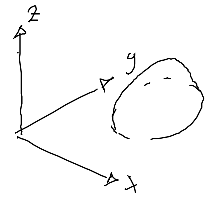
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Fluss von } \underline{a}(\underline{r}) \text{ durch Fläche } F \\ &Q = \int_F a(\underline{r}) \cdot d\underline{f} \qquad \text{mit Flächenelement } d\underline{f} = df\,\underline{\nu} \end{aligned}}$$

Normalenvektor auf F bei $\underline{r}$ mit $|\underline{\nu}| = 1$

NB: vgl. Deutung $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}$ in Kap. 6.5

- Punkte auf Fläche F im Raum: $\underline{r} = \underline{r}(\underbrace{u, v}_{\text{2 Variablen}})$ (7.12)

Bsp:

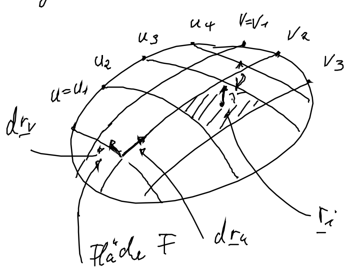


Fläche über x-y-Ebene möglich $(u, v) = (x, y)$

Bsp: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Halbkugel mit $z > 0$ und Radius $= 1$

allgemeine Fläche:



$u =$ konst. oder $v =$ konst

$\Delta \underline{f}(\underline{r}_i) = \Delta f\, \underline{\nu}$, $|\underline{\nu}| = 1$

Achtung: alle $\underline{\nu}$ auf F in den selben Halbraum!

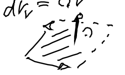
- Fluss von $\underline{a}(\underline{r})$ durch die Fläche F:

$$Q = \sum_{\text{„}i \in F\text{"}} \underline{a}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{f}(\underline{r}_i) \xrightarrow{\Delta \underline{f} \to d\underline{f}} \int_F \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f} \qquad (7.14)$$

- Berechnung:

Flächenelement $d\underline{f}$:

$d\underline{r}_v = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} dv$



$d\underline{r}_u = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} du$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} d\underline{f} &= d\underline{r}_u \times d\underline{r}_v \\ &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du\, dv \end{aligned}} \qquad (7.16)$$

(i) $d\underline{f} \perp d\underline{r}_u, d\underline{r}_v$

(ii) $|d\underline{f}| =$ Fläche des von $d\underline{r}_u$, $d\underline{r}_v$ aufgespannten Parallelograms!

in (7.11)

$$\Rightarrow \boxed{Q = \int_F \underline{a}(\underline{r}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du\, dv} \qquad (7.17)$$

... Doppelintegral (s. HM)