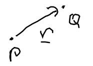
5. Euklidischer Raum (Fortsetzung)

5.1 Definitionen

· Def.: Ein Punktraum A mit $P, Q, R, ..$ und ein Vektorraum V bilden einen affinen Raum, wenn gilt:

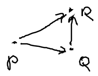
(1) $P, Q \in A \mapsto$ Verbindungsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{PQ} \in V$

(2) „Abtragen" eines $\underline{r} \in V$ von P führt zu genau einem Q



(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Dreiecksregel)

(4) $\overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow P=Q$



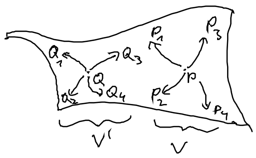
(5.1)

· Def.: Ist V ein euklidischer Vektorraum, so bildet mit ihm A ein euklidischen Raum. (5.2)

→ Abstandsmessung in A über Skalarprodukt in V:

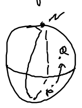
$$d(P,Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$

· gekrümmte Räume ≠ affine Räume



$V' \neq V$

Bsp. Kugeloberfläche:



$\overrightarrow{PQ}$ auf Großkreis

Nullelement $\underline{0} = \overrightarrow{NN}$ ist nicht eindeutig definiert

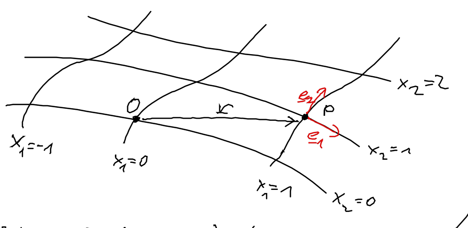
→ kein V

5.2 Koordinatensysteme

· Motivation: Bahnkurven eines Massenpunkts, Skalar-/Vektorfelder im Raum } angeben

· Ort von Punkt $P \longleftrightarrow$ Koordinatentripel (x_1, x_2, x_3)

a) allgemeine (krummlinige) Koordinaten



} Netz von beliebigen Koordinatenlinien

Ort von $\underbrace{P: (x_1, x_2, x_3)}_{\in A}$ mit Ortsvektor $\underbrace{\underline{r} = \overrightarrow{OP}}_{\in V}$

· natürliche (Koordinaten) Basis für den Vektorraum V_P, angeheftet an an P:

normierte Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an x_i-Linien ($x_j = \text{const.}, j \neq i$)
$|\underline{e}_i| = 1$; i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ i.a. nicht ortsfest

- Berechnung? → Einschub: <u>partielle Ableitung</u>

(i) Skalarfeld: $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ Bsp. T

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_j = \text{konst.}\\ j \neq i}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \varepsilon, \ldots) - f(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}} \quad (5.3)$$

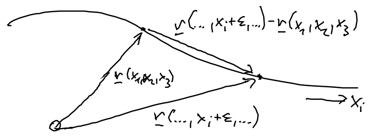
Schreibweise $\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \partial_i f(\underline{r})$

(ii) Vektoren: $$\boxed{\frac{\partial \underline{v}(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{v}(\ldots, x_i + \varepsilon, \ldots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon}} \quad (5.4)$$

(iii) Produktregel, Kettenregel, etc. gültig

- Tangentialvektoren an x_i-Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(\ldots, x_i + \varepsilon, \ldots) - \underline{r}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \quad (5.5)$$

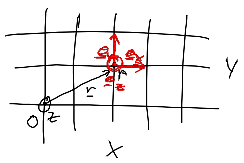


, $x_j = \text{konst.}, j \neq i$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}} \quad (5.6)$$

N.B.: In RT, $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$ (nicht normiert)

b) <u>kartesische Koordinaten</u>

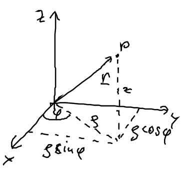


$P: \underbrace{(x, y, z)}_{\text{Tripel}}$

- $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ ortsfest
  $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$; $i,j = x,y,z$

$$\underbrace{\underline{r} = x_i \underline{e}_i}_{\text{Ortsvektor}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.7)$$

c) <u>Zylinderkoordinaten</u>



$P: (\underbrace{\varrho, \varphi}, z)$ } Tripel
Polarkoordinaten in xy-Ebene

$$\underline{r} = \varrho\cos\varphi\, \underline{e}_x + \varrho\sin\varphi\, \underline{e}_y + z\underline{e}_z$$
$$= \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$ Ortsvektor

- Koordinatenbasis ortsabhängig!

$$\underline{e}_\varrho = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varrho}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varrho} \overset{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \overset{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{\rho^2 (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1})} = \rho$$

$$\longrightarrow \underline{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

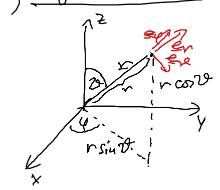
$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

· $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$, $i,j = \rho, \varphi, z$

NB:

$$\underline{r} = \rho\, \underline{e}_\rho + z\, \underline{e}_z \qquad (5.10)$$

d) Kugelkoordinaten



$P: (r, \vartheta, \varphi)$ — φ: Azimuthalwinkel, ϑ: Polarwinkel

$$\underline{r} = r \sin\vartheta \cos\varphi\, \underline{e}_x + r \sin\vartheta \sin\varphi\, \underline{e}_y + r\cos\vartheta\, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (5.11)$$

· Koordinatenbasis: ortsabhängig

$\longrightarrow$ Übungen

NB. $\underline{r} = r\, \underline{e}_r(\vartheta, \varphi) \qquad (5.12)$

5.3 Bahnkurven

· Teilchenbahnen im Raum:

(i) Zeit $t \longmapsto \underbrace{x_1(t), x_2(t), x_3(t)}_{\text{Koordinatentripel}} \qquad (5.13)$

x_i ... kart., zylinderk., Kugelk., ...

(ii) $t \longmapsto \underline{r}(t) \qquad (5.14)$

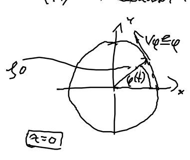
Bsp: (i) gerade Bahn:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_x t + \underset{\text{Ort bei } t=0}{x_0} \\ y(t) &= v_y t + y_0 \\ z(t) &= v_z t + z_0 \end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

v_x, v_y, v_z: konst. Geschwindigkeiten

$$\hat{=} \quad \underline{r}(t) = \underline{v}\, t + \underline{r}_0 \qquad (5.16)$$

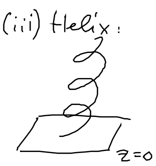
(ii) Kreisbahn:



$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{\rho_0} t = \omega\, t \\ z(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

ω: "Kreisfrequenz" (Winkel pro Zeit)

(iii) Helix:

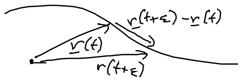


$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \\ \varphi(t) &= \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

- Teilchengeschwindigkeit:

$$\boxed{\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon}} \quad (5.19)$$

(i) Tangente an Bahnkurve



(ii) $v(t) = |\underline{v}(t)| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)|}{\varepsilon}$

(iii) Einschub: Rechenregeln für Vektordifferentiation