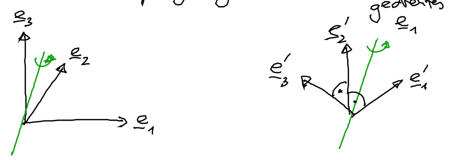
2.3 Drehungen / Spiegelungen

- Problemstellung:
  (1) Beschreibe Drehungen/Spiegelungen von $\underline{a} \in V$
  (2) Darstellung von $\underline{a}$ bzgl. neuer Basis

- Anwendung:
  (1) Basiswechsel
  (2) starrer Körper (klass. Mechanik)
  (3) Computergraphik (Drehungen von Objekten)
  (4) Symmetriebetrachtungen
  (5) Eugene Paul Wigner
  [Prof. an TU → 1933
  Nobelpreis 1963.]

- Orthonormalbasis (ONB):

$$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{\text{Drehung um bel. Achse}} \{\underline{e}_1' = \underbrace{R\,\underline{e}_1}_{\text{gedrehtes } \underline{e}_1},\ \underline{e}_2',\ \underline{e}_3'\}$$



$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j \qquad \text{mit} \quad D_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j = \cos \sphericalangle(\underline{e}_i', \underline{e}_j)} \qquad (2.32)$$

- Eigenschaften der „Drehmatrizen" $\underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
  Winkel- und Norm erhaltend („Isometrie")

insbes. $\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j' = \delta_{ij} \underset{(2.32)}{=} (D_{ik}\underline{e}_k) \cdot (D_{jl}\underline{e}_l) = D_{ik} D_{jl} \underbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l}_{\delta_{kl}}$

$$\xrightarrow[\longrightarrow]{D_{jk} = D^t_{kj}} \quad \boxed{\begin{aligned} D_{ik} D^t_{kj} &= \delta_{ij} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{D}}^{-1} \end{aligned}} \quad (2.33)$$

... orthogonale Matrix $\in O(3)$
(nicht kommutative Gruppe aller Drehungen & Spiegelungen)
→ Übungen

<u>Bem:</u> $\underline{\underline{D}}^{-1}$ ... macht Drehung $\underline{\underline{D}}$ rückgängig = zu $\underline{\underline{D}}$ inverses Element

- Konstruktion:

$$(2.32) \longrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} [\underline{e}_1'] = [\underline{e}_1'\cdot\underline{e}_1, \underline{e}_1'\cdot\underline{e}_2, \underline{e}_1'\cdot\underline{e}_3] \\ [\underline{e}_2'] = \quad \dots \\ [\underline{e}_3'] = \quad \dots \end{pmatrix} \qquad (2.34)$$

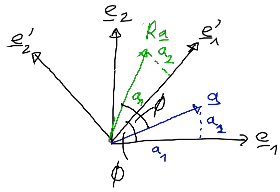
- Problemlösung:

(1) Drehung/Spiegelung von $\underline{a}$: $\quad \underline{a} = a_i \underline{e}_i \longrightarrow R\underline{a} \overset{!}{=} a_i \underline{e}_i' = a_i D_{ij} \underline{e}_j$

Darstellung in $\{\underline{e}_i\}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} [R\underline{a}]_j &= a_i D_{ij} \\ &= D^t_{ji} a_i \\ R\underline{a} &= \underline{\underline{D}}^t \underline{a} \end{aligned}} \quad (2.35)$$

in $\mathbb{R}^3$:



„aktiver" Standpunkt

(2) $\underline{a}$ in neuer Basis: $\quad \underline{a} = a_j \underline{e}_j \overset{!}{=} a_i' \underline{e}_i'$

$\longrightarrow$ Trafo. von Vektor Komp.

$$a_i' = \underline{e}_i' \cdot \underline{a} = \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j}_{D_{ij}} a_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a_i' &= D_{ij} a_j \\ a_i &= D^t_{ij} a_j' \end{aligned}} \longrightarrow D^t_{ki} a_i' = \underbrace{D^t_{ki} D_{ij}}_{\delta_{kj}} a_j = a_k$$

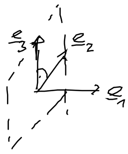
$\xrightarrow[i \to j]{k \to i}$

„passiver Standpunkt"

mit $\underline{a}, \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{\underline{D}}\, \underline{a} \\ \underline{a} &= \underline{\underline{D}}^t \underline{a}' \end{aligned}} \quad (2.37)$$

- Bsp. 1: Spiegelung an Ebene $\perp \underline{e}_1$:



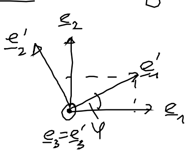
$\longrightarrow \underline{e}_1' = -\underline{e}_1, \quad \underline{e}_2' = \underline{e}_2, \quad \underline{e}_3' = \underline{e}_3$

$$\longrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Bsp. 2: „Raumspiegelung" = Pkt. spiegelung am „Ursprung"

$$\rightarrow \underline{e}_i' = -\underline{e}_i \longrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Bsp. 3: Drehung um $\underline{e}_3$ (z-Achse):



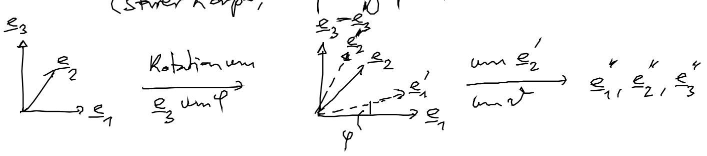
$\underline{e}_i'$ in $\{\underline{e}_i\}$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{e}_3, \varphi) = [\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j] = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0} \\ -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 0 \\ 0 \quad\quad 0 \quad\quad 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

- Bsp. 4: <u>Eulersche Winkel</u> (verschiedene Konventionen)

$\longrightarrow$ allg. Orientierung von von $\{\underline{e}_i' = R\underline{e}_i\}$

(starrer Körper, Computergraphik)



$\xrightarrow[\text{um } \psi]{\text{um } \underline{e}_3''} \underline{e}_1''', \underline{e}_2''', \underline{e}_3''' :$ $\quad \boxed{\underline{\underline{D}}(\varphi,\vartheta,\psi) = \underbrace{\underline{\underline{D}}(\underline{e}_3'',\psi)}_{\text{in}\{\underline{e}_i''\}} \underbrace{\underline{\underline{D}}(\underline{e}_2',-\vartheta)}_{\text{in}\{\underline{e}_i'\}} \underline{\underline{D}}(\underline{e}_3,\varphi)}$ (2.41)

$\longrightarrow$ allg. Drehung/Spiegelung: 3 Winkel!! (s. Übung)

Applet: Webseite Vorlesung $\longrightarrow$ Materialien

- Händigkeit:

(i) Drehungen: Rechtssystem $\longrightarrow$ Rechtssystem

Spatprodukt: $\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = 1 = \begin{vmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \cdots & \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \cdots & \end{vmatrix}$

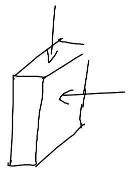
$\longrightarrow \boxed{1 \overset{(2.34)}{=} |\underline{\underline{D}}| = \det \underline{\underline{D}}}$ (2.42)

$\longrightarrow \underline{\underline{D}} \in SO(3)$ ... eigentlich orthogonale Matrizen (nur Rotationen)

(ii) Spiegelung: Rechtssystem $\longrightarrow$ Linkssystem

$\boxed{\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) = -1 = |\underline{\underline{D}}|}$

- $\underline{\underline{D}} \in O(3)$ ... Punktoperationen
wichtig zur Klassifizierung von Kristallen
(kubische, hexagonale, ... Kristalle)



2.4. Abstrakte Definition eines Vektorraums

- Grund: (i) „Rechenregeln" für Vektoren
(ii) Erweiterung des Vektorbegriffs

- Def.: $\longrightarrow$ s. Folie

- Bsp.: (i) Vektoren für Physiker ($\longrightarrow$ Kap. 2.1)
(ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ... n-Tupel, $a_i \in \mathbb{R}$
Zeilenvektor
$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ... Spaltenvektor

$\underline{a} + \underline{b} := (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$
$p\,\underline{a} := (pa_1, \dots, pa_n) \quad , p \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Darstellung von Vektoren bzgl. Basis ($\longrightarrow$ Kap. 2.1.1)

(iii) $n \times m$ – Matrizen $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($\longrightarrow$ Kap. 2.2)

$$\left.\begin{aligned} [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}]_{ij} &:= A_{ij} + B_{ij} \\ [p\underline{\underline{A}}]_{ij} &:= p A_{ij} \end{aligned}\right\} (2.21)$$

(iv) entsprechend: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n \times m}$

(v) Polynome n-ten Grades:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ äquivalent zu $(n+1)$-Tupel $\in \mathbb{R}^{n+1}$

$\longrightarrow$ Taylorentwicklung
$\longrightarrow$ Legendrepolynome (s. Übung)