2.5 lineare Unabhängigkeit, Entwicklungssatz

• **Def:** Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ heißen linear unabhängig, falls $p_1\underline{a}_1 + p_2\underline{a}_2 + \dots + p_n\underline{a}_n = \underline{0}$ nur für $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ erfüllt ist, andernfalls heißen sie linear abhängig. (2.46)

• **Def:** Die maximale Zahl n linear unabhängiger Vektoren im Vektorraum V heißt eine Basis in V. n heißt Dimension von V. (2.47)

• Entwicklungssatz: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ... Basis in V

$\longrightarrow$ eindeutige Entwicklung: $\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{e}_i$ (2.47a)

• **Bsp:** (i) Vektoren für Physiker ($\longrightarrow$ Kap. 2.1.1)

(ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ $\underline{e}_2 = (0, 1, \dots 0)$ ... $\underline{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$

(iii) $\mathbb{R}^{n\times m}$, klar!

(iv) Polynome: $\underline{e}_0 = 1$, $\underline{e}_1 = x$, $\underline{e}_2 = x^2$, ...

2.6 Euklidischer Vektorraum

• Warum? „Länge von / Winkel zwischen Vektoren" Messen!

• **Def:** Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen Vektorraum und einem Skalarprodukt = inneres Produkt $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften: (2.48)

(A1) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ -- Symmetrie

$$\left.\begin{array}{ll}(A2) & \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0 \\ (A3) & \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \longleftrightarrow \underline{a} = \underline{0}\end{array}\right\} \text{positive Definitheit}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(A4) & (p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p\,(\underline{a} \cdot \underline{b}),\ p \in \mathbb{R} \\ (A5) & (\underline{a}+\underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}\end{array}\right\} \dots \text{Linearität}$$

Sprechweise: "·" ist symmetrisch (A1)
positiv-definite (A2/3)
bilineare (A1/4/5)
Abbildung: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

• Messen!

(i) Länge, Betrag, Norm von $\underline{a}$: $a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$ (2.49)

(ii) $\underline{a}$ „steht senkrecht auf" $= \perp$ $\underline{b}$, falls $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ (2.50)

• Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in V ist

Orthonormal-Basis, wenn

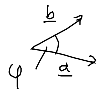
$$\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ... normiert, Einheitsvektoren} \\ 0, & i \neq j \text{ ... orthogonal} \end{cases}} \quad (2.51)$$

Kronecker-Symbol ($i,j = 1, \dots n$)

Bem: Erzeugung von Orthonormal-Basis aus beliebiger Basis $\longrightarrow$ Gram-Schmidt'sches Orthonormierungsverfahren $\longrightarrow$ Übungen

- Bsp 1: Vektoren für Physiker ($\to$ Kap. 2.1)

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\varphi$



Bsp 2: $\mathbb{R}^n$: $\quad \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad (2.52)$ ($\to$ Kap. 2.1.1)

Bsp 3: $\mathbb{R}^{n \times m}$: $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ij}$

Bsp 4. Polynome: $\quad p_1(x), \; p_2(x)$

$$p_1 \cdot p_2 = \int_{-1}^{1} p_1(x)\, p_2(x)\, dx \quad (2.54)$$

„kontinuierlicher Index"

2.7 Erweiterungen

- „Erinnerung": $\mathbb{C}$ ... komplexe Zahlen

$$\boxed{\begin{array}{l} z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ mit } i = \sqrt{-1} \longrightarrow i^2 = -1 \\ \left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \text{ ... Realteil} \\ y \in \mathbb{R} \text{ ... Imaginarteil} \end{array}\right\} \text{ von } z \\ z^* = x - iy \text{ ... konjugiert komplex zu } z \\ |z|^2 = z z^* = x^2 + y^2 \text{ ... Betrag von } z \end{array}} \quad (2.55)$$

- für Vektorraum V über $\mathbb{C}$: Verallgemeinerung

Def: Unitärer Vektorraum = komplexer V & (hermitesches) Skalarprodukt

$\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

(A1') $\underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{a})^*$ ... hermitesch $\quad (2.56)$

$\left.\begin{array}{ll} \text{(A2)} & \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0 \\ \text{(A3)} & \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \leftrightarrow \underline{a} = 0 \end{array}\right\}$ wie in (2.48)

$\left.\begin{array}{ll} \text{(A4')} & (p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p^* (\underline{a} \cdot \underline{b}), \; p \in \mathbb{C} \\ \text{(A5)} & (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \quad \text{wie in (2.48)} \end{array}\right\}$ semilinear im 1. Argument

insbesondere: $\boxed{\underline{a} \cdot p\underline{b} = p\,(\underline{a} \cdot \underline{b})}$ ... linear im 2. Argument (2.57)

$$\underbrace{\underline{a} \cdot p\underline{b}}_{} \overset{(A1')}{=} (p\underline{b} \cdot \underline{a})^* = [p^* (\underline{b} \cdot \underline{a})]^* = p\,(\underline{b} \cdot \underline{a})^* \overset{(A1')}{=} p\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$$ qed

• Sprechweise: „·" ist hermitesche (A1')
positive definite (A2/3)
sesquilineare (A1', A4', A5)
Abbildung: $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

• Schreibweisen:

$$\underbrace{\underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{a}, \underline{b})}_{\text{Vektoren}} = \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle$$

$(\underline{a}, \underline{b}) = \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle$: Funktionen, QM: „Bra{}ket"

• Bsp: $\mathbb{C}^n$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1^* b_1 + \quad + a_n^* b_n$ (2.58)

• Def: Prähilbertraum P = V mit hermiteschem Skalarprodukt

$P \nearrow V$ über $\mathbb{R}$: euklidischer V (2.59)

$P \searrow V$ über $\mathbb{C}$: unitärer V

• Def: Hilbertraum H = vollständiger Prähilbertraum P
↳ alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $\in P$

Bsp: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: nicht vollständig
reelle " $\mathbb{R}$: vollständig

$$\left.\begin{aligned} \pi &\approx 3 \\ &\approx 3{,}1 \\ &\approx 3{,}14 \end{aligned}\right\} \in \mathbb{Q}$$

$\vdots$

aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

• Anwendung in QM: Hilbertraum „gutartiger" Funktionen
[∞-dim. Vektorraum,
unitär: Norm, senkrecht stehen
Hilbert: gutartig]

Bsp: Legendre Polynome $P_l(x)$, $|x| \leq 1$
$\{1, x, x^2, \dots\}$ ... Basis im Raum der Polynome
$\xrightarrow[\text{nalisiere}]{\text{Orthogo-}} P_l(x)$

NB: $|x| = |\cos\vartheta| \leq 1 \longrightarrow$ QM

3. Lineare Gleichungssysteme & Determinante

(Details s. HM)

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Geg:}}\ \text{Koeffizientenmatrix } \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times m} \text{ und} \\ \text{Spaltenvektor } \underline{b} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\text{Ges:}}\ \text{Spaltenvektor } \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \text{ so daß} \\ \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \\ \qquad A_{ij} x_j = b_i \\ \underline{b} = \underline{0} \ \dots \text{ homogenes Gln. system} \\ \underline{b} \neq \underline{0} \ \dots \text{ inhomogenes " "} \end{array}} \qquad (3.1)$$

- Anwendung: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren [s. Kap. 4]
  (ii) elektr. Netzwerke
- Fragen: (i) existiert Lösung $\underline{x}$?
  (ii) ist $\underline{x}$ eindeutig?

$\underline{\text{Bsp:}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ x_1, x_2 existiert nicht

Grund: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständige Basis in $\mathbb{R}^3$

- Beschränkung auf $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$!

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{formale Lsg von 3.1:} \\ \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}\end{array}} \qquad (3.2)$$

Spezialfälle:

(i) $n=2$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur lösbar, falls $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.)

$\underline{\text{Def:}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Determinante von } \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \\ \det \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}\end{array}} \qquad (3.4)$$

Warum: $(3.3) \xrightarrow{\text{z.B.}}$ $\det \underline{\underline{A}}\, x_1 = b_1 A_{22} - b_2 A_{12}$

$\det \underline{\underline{A}}\, x_2 = b_2 A_{11} - b_1 A_{21}$

also: $\underline{b} = 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, nur falls $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$\underline{b} \neq 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert eindeutig, " " "