

Wdh. Klassifizierungsschema für ^{dyn.} Gleichungen für Ordnungparameter:

Unklarheit: Ordnungparameter erhalten oder nicht, Symmetrie, Randterme, ...

Modell A: Skalare Ordnungparameter, nicht erhalten.

$$\frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} = -M \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(r,t)} + \underbrace{\eta(r,t)}_{\text{"Rauschen"}}$$

$$\langle \eta(r,t) \rangle = 0$$

$$\langle \eta(r,t) \eta(r',t') \rangle = 2M_B T M \delta(r-r') \delta(t-t')$$

$F[\phi]$: Ginzburg-Landau - Freie Energie

es gibt also ein
Fluktuations-Dissipations Theorem
(FDT)!

Zum FDT in den Ordnungparametergleichung ("mesoskopische" Gleichung)

↳ zw. mikroskopisch und makroskopisch

Beispiel: Modell A mit ortsunabhängiger
Ordnungsparameter $\phi(t)$

$$(*) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -M \frac{\partial F}{\partial \phi} + \eta(t) \quad \text{mit} \quad \langle \eta(t) \rangle = 0$$

einfach partielle Ableitung ebenfalls ortsunabhängig

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = T \delta(t-t')$$

Forderung: Im Gleichgewicht soll ϕ der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P^{\text{eq}}(\phi) \sim e^{-\beta F(\phi)} \quad \text{genügen (mit } \beta = \frac{1}{k_B T} \text{)}$$

Vergleichen mit Boltzmannfaktor!

(Beachte: Die Abhängigkeit $\sim e^{-\beta F(\phi)}$
ersetzt hier die Abhängigkeit $\sim e^{-\beta H(x_3, p_3)}$
für die mikroskop. Freiheitsgrade!
Grund: mesoskopische Beschreibung

Betrachte zunächst die Fokker-Planck-Gl. für die Verteilung $P(\phi)$ (noch nicht notwendigerweise im Gleichgewicht!), die $\otimes$ entspricht.

Fasse dazu $\otimes$ als verallgemeinerte Lagrange-Gl. auf!

Kramers-Fokker-Koeffizienten: (ablesen!) (additives Rauschen)

$$U^{(1)} = -M \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \quad U^{(2)} = \frac{\Gamma}{2}$$

$\Rightarrow$ Fokker-Planck-Gl.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\phi, t) &= \left(-\frac{\partial}{\partial \phi} \left(-M \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \frac{\Gamma}{2} \right) P(\phi, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\underbrace{-M \frac{\partial F}{\partial \phi} P(\phi, t) - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} P(\phi, t)}_{\text{Strom!}} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \phi} J_{\phi} \end{aligned}$$

Gleichgewicht: $J_{\phi} = 0$, $P(\phi, t) \rightarrow P^{\text{eq}}(\phi)$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} P^{\text{eq}}(\phi) = -M \frac{\partial F}{\partial \phi} P^{\text{eq}}(\phi)$$

Lösung kann sofort hingeschrieben werden (s. Diskussion Fokker-Planck in 1 Dimension)

$$\begin{aligned} P^{\text{eq}}(\phi) &= \exp \left(\text{const} + \underbrace{\frac{2}{\Gamma}}_{(U^{(2)})^{-1}} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' \underbrace{\left(-M \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)}_{U^{(1)}} \right) \\ &\sim e^{-\frac{2M}{\Gamma} F(\phi)} \end{aligned}$$

Wir hatten gefordert: $P^Q(\phi) \sim e^{-\beta F(\phi)}$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2M}{T}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = \frac{1}{2M} k_B T$$

Mobilität konstant

Stärke des
Panzers

q.e.d.

Modell B

Im Unterschied zu Modell A bleibt hier der Ordnungsparameter erhalten!

$$\rightarrow \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} = -\nabla \cdot j(r,t)$$

Ginzburg-Landau Form

$$\text{mit } j(r,t) = -M \nabla \frac{\delta F}{\delta \phi} + \underline{j}^*(r,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(r,t)}{\partial t} = M \nabla^2 \frac{\delta F}{\delta \phi} + \underline{j}(r,t) \quad \text{mit } \underline{j}(r,t) = \nabla \cdot \underline{j}^*(r,t)$$

Panzern

Für $\underline{j}(r,t) = 0$ hat Modell B dieselbe Form wie die
Ginzburg-Hilland-Theorie!

$$(\phi(r,t) \rightarrow \psi(r,t))$$

Anwendung von Modell A

- ursprünglich für Supraleitung, Supraleitendität
- Magnetisdynamik in einem Festkörper

↳ dieses Beispiel wollen wir hier diskutieren!

Ziel: Verständnis der Dynamik eines skalaren, nicht erhaltenen Ordnungsparameters
in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung

Hintergrund:

Viele magnet. Festkörper weisen im Gleichgewicht einen Phasenübergang von einer paramagnetischen Hochtemperaturphase in eine ferromagnetische Tieftemperaturphase auf!

Betrachte hier System, dessen Magnetisierung eine skalare Größe ist.

(z.B. aufgrund von Kristallanisotropie
→ Magnetisierung kann nur best. Richtungen annehmen
→ skalare Beschreibung genügt!)

Kann aber als- und zeitabhängig sein!

Kurze Wiederholung der Beschreibung eines solchen Systems im Gleichgewicht auf Ordnungparameterebene

Ginzburg-Landau-Funktion (impliziert 'mean-field-artige' Beschreibung)

$$F[M] = \int d\mathbf{r} \left(\frac{a}{2} (T - T_c) (M(\mathbf{r}, t))^2 + \frac{b}{4} (M(\mathbf{r}, t))^4 + \frac{c}{2} (\nabla M(\mathbf{r}, t))^2 - M(\mathbf{r}, t) \underbrace{H(\mathbf{r}, t)}_{\text{externes Feld}} \right)$$

vernachlässige Zeitabhängigkeit (Gleichgewicht!)

Idee: Das statistisch Gewicht einer Konfiguration $M(\mathbf{r})$ ist gegeben durch $e^{-\beta F[M]}$

⇒ die wahrscheinlichste Konfiguration ergibt sich aus $\frac{\delta F[M]}{\delta M(\mathbf{r})} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{a(T - T_c) M(\mathbf{r}) + b(M(\mathbf{r}))^3 - c \Delta M(\mathbf{r}) - H(\mathbf{r}) = 0} \quad (*)$$

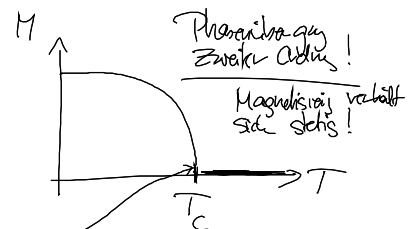
betrachte Fall $H(\mathbf{r}) = 0$, homogenes Ordnungparam. $M(\mathbf{r}) = M$

$$a(T - T_c) M + b M^3 = 0$$

$$T < T_c \Rightarrow M \neq 0 \quad a(T - T_c) + b M^2 = 0$$

Magnetisierung
driftet unterhalb
von T_c

$$M \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$



Suszeptibilität. $\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0}$

Stetpunkt. $a(T-T_C)M + bM^3 - H = 0$

(homogene Ordnungsparameter,
homogenes Feld)

Ableiten nach H :

$$a(T-T_C) \frac{\partial M}{\partial H} + b 3M^2 \frac{\partial M}{\partial H} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial H} (a(T-T_C) + 3bM^2) = 1$$

betrachte $T > T_C$: $M=0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{a(T-T_C)} \sim (T-T_C)^{-1}$

Curie-Verhalten

Man nennt die Exponenten $\frac{1}{2}$ ($M \sim (T-T_C)^{\frac{1}{2}}$) und 1 ($\chi \sim (T-T_C)^{-1}$)
kritische Exponenten. Hier ergeben sich die Meanfield-Werte!

(i.A.: Exponenten haben andere Werte, Universalität)

Frage nun

Dynamik des Ordnungsparameters $M(r,t)$ direkt am kritischen Punkt?

Idee:

~~Am~~ In der Nähe von T_C divergiert die Suszeptibilität, und die
räumliche Korrelation des Ordnungsparameters werden langreichweitig (hier nicht
gezeigt)

$$\langle M(r) M(r') \rangle$$

d.h. die Korrelationslänge divergiert!

Was impliziert das für das zeitliche Verhalten?

Ansatz für die Zeitabhängigkeit (Modell A)

$$\frac{\partial M(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\lambda \underbrace{\frac{\delta F[M]}{\delta M(\underline{r}, t)}}_{\substack{\text{Relaxation ins} \\ \text{Minimum von } F[\phi], \\ \lambda > 0}} + \underbrace{\eta(\underline{r}, t)}_{\substack{\text{Stochastischer Term} \\ (\text{z.B. von schnellen Stör-schwüngen} \\ \rightarrow \text{nicht verändernde} \\ \text{statistische Kraft!})}} \quad (*)$$

$$\text{FDI: } \langle \eta(\underline{r}, t) \eta(\underline{r}', t') \rangle = 2 \lambda k_B T \delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t')$$

Auswertung von (*) durch Ableitung von $F[M]$

$$\frac{\partial M(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\lambda \left(a(T - T_c) M(\underline{r}, t) + \cancel{b(M(\underline{r}, t))^3} - c \Delta M(\underline{r}, t) + \cancel{M(\underline{r}, t) \nabla^2 M(\underline{r}, t)} \right) + \eta(\underline{r}, t)$$

betrachte $H=0$ (kein äußeres Feld)

Vernachlässige anharmonische Term $\propto M^3$

$\Rightarrow$ effektiv: Linearisierung!

Einfacher zu behandeln im Fourierraum

$$\tilde{M}(\underline{k}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} M(\underline{r}, t)$$

$$\Delta M(\underline{u}, t) \rightarrow -\frac{(\underline{u})^2}{k^2} \tilde{M}(\underline{u}, t)$$

$$\tilde{\eta}(\underline{u}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} \eta(\underline{r}, t)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}(\underline{u}, t) = -\lambda (a(T-T_c) + c k^2) \tilde{M}(\underline{u}, t) + \tilde{\eta}(\underline{u}, t) \right]$$

Rauslösen

Entkopplung bzgl. $\underline{u}$!

$\forall \underline{u}$

Diese Gleichung hat (für jedes $\underline{u}$) genau dieselbe Struktur wie eine (verallgemeinerte) Langevin-Gleichung, ist eine Drift-Diffusion !

$$\left(\dot{\underline{v}} = -\gamma \underline{v} + \underline{f}(t) \right)$$

Gesamt eines Vektors

$\Rightarrow$ Wir können sofort schreiben:

$$M(\underline{u}, t) = \tilde{M}(\underline{u}, 0) e^{-\gamma_{\underline{u}} t} + e^{-\gamma_{\underline{u}} t} \int_0^t dt' e^{\gamma_{\underline{u}} t'} \tilde{\eta}(\underline{u}, t')$$

für jede Realisierung des Rauschens!

$$\text{mit } \gamma_{\underline{u}} = \lambda (a(T-T_c) + c k^2)$$

Wir wollen nun Mittelwerte und Schwankungen von $\tilde{M}(\underline{u}, t)$ ausrechnen!

$$\langle \tilde{M}(\underline{u}, t) \rangle = \tilde{M}(\underline{u}, 0) e^{-\gamma_{\underline{u}} t} \quad (\text{wegen } \langle \tilde{\eta}(\underline{u}, t) \rangle = 0)$$

Exponentielles Abklingen der Anfangsmagnetisierung

Korrelationsfunktion (Schwankung)

→ Langevin-Theorie

$$\langle \tilde{M}(k, t) \tilde{M}(k, t') \rangle = \frac{\lambda k_B T}{\gamma_k} e^{-\gamma_k (t - t')} + e^{-\gamma_k (t + t')} \left(\langle (\tilde{M}(k, 0))^2 \rangle - \frac{\lambda k_B T}{\gamma_k} \right)$$

z.B. über Ginzburg-Landau-Theorie

beachte: in Gleichg. wird gilt:

benutze Def. von γ_k

$$\langle (\tilde{M}(k, 0))^2 \rangle = \frac{\lambda k_B T}{\gamma_k} = \frac{1}{a(T - T_c) + ck^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \tilde{M}(k, t) \tilde{M}(k, t') \rangle &= \frac{k_B T}{\gamma_k} e^{-\gamma_k (t - t')} \\ &= \frac{k_B T}{a(T - T_c) + ck^2} e^{-\gamma_k (t - t')} \end{aligned}$$

Folgerung:

Die zeitlichen Korrelation der Magnetisierung in der Nähe des kritischen Punktes (da wir linearisiert haben!) zerfallen exponentiell mit der Relaxationszeit

$$\gamma_k = \lambda (a(T - T_c) + ck^2)$$

Man sieht:

Bei festem $k = |k|$ wird γ_k für $T \rightarrow T_c$ drastisch kleiner

(insbesondere: für $k \rightarrow 0$ und $T \rightarrow T_c$ geht $\gamma_k \rightarrow 0$)

⇒ die Zeit-Korrelation klingen immer langsamer ab!

„critical slowing down“ !

helfen durch dynamischen Skalierung

Typisches Phänomen in der Nähe eines Phasenübergangs
Zurück Ordnung