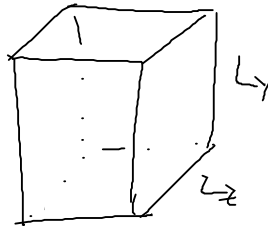


Casimir-Effekt:



Sei $L_x = L_y = L$
und $L \gg L_z$

Klassische Elektrodynamik L_x

Moden sind nicht aus der QM, alleine durch Randbedingungen bestimmte Amplitudenverteilungen.

- (1.) Maxwellgl. mit Vakuum
- (2.) Vektorpotential \vec{A} , dafür Gleichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
- (3.) Separationsansatz: $\vec{A} = \sum_{\vec{k}} q(\vec{k}) \vec{V}(\vec{r})$
- (4.) Modenentwicklung (Entwicklung nach ebenen Wellen)
- (5.) Randbedingung: $\vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{e}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$
- (6.) Geometrie der Box nutzen

$$\begin{aligned} V_x(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\rho}{V}} \underline{a_x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ V_y(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\rho}{V}} \underline{a_y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ V_z(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\rho}{V}} \underline{a_z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{aligned}$$

$$\vec{e} = (a_x, a_y, a_z) \quad \boxed{\vec{e} \cdot \vec{e} = 1}$$

- (7.) Moden an die RB anpassen

$$k_x = \frac{2x\pi}{L_x}, \quad k_y = \dots$$

- (8.) Moden an die Gleichung anpassen

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$0 = \sqrt{\frac{\rho}{V}} \{ a_x k_x + a_y k_y + a_z k_z \} \underline{\sin(k_x x)} \underline{\sin(k_y y)} \underline{\sin(k_z z)}$$

Zwei Fälle: (i) $\lambda_x \neq 0, \lambda_y \neq 0, \lambda_z \neq 0$

λ_z festgelegt \Rightarrow Z-Polarisation, in der Ebene $x-y$

(ii) $\lambda_x = 0$ oder $\lambda_y = 0$

\Rightarrow nur eine Polarisation

$$(9.) H = \int d^3r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell = \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z \\ P \leftarrow \text{Polarisation}}} \left[\dot{q}_\ell^2 + (\hbar \omega_\ell)^2 q_\ell^2 \right]$$

\leftarrow Mode \leftarrow Ertricklungsoperatoren des Zeitanteils

$$\omega = c|\lambda| = c\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\ell, P} \hbar \omega_\ell \left[\hat{a}_{\ell, P}^\dagger \hat{a}_{\ell, P} + \hat{a}_{\ell, P} \hat{a}_{\ell, P}^\dagger \right]$$

$$a_\ell = \frac{1}{\sqrt{2\hbar \omega_\ell}} \left[\omega_\ell q_\ell + i \dot{q}_\ell \right]$$

$$(11.) a_{\ell, P}^\dagger \rightarrow \hat{a}_{\ell, P}^\dagger, a_{\ell, P} \rightarrow \hat{a}_{\ell, P}$$

Kommutatorrelation; die erhalten wir aus dem Korrespondenzprinzip

$$i\hbar \partial_t \langle A \rangle = \langle [H, A] \rangle + \langle \partial_t A \rangle$$

$$-i\hbar \partial_t \vec{E} = i \nabla \times \vec{B}$$

$$[\hat{a}_{\ell', P'}, \hat{a}_{\ell, P}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{PP'}$$

$$(12.) \hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\ell, P} \omega_\ell \left[2 \hat{a}_{\ell, P}^\dagger \hat{a}_{\ell, P} + 1 \right]$$

$$\boxed{E = \langle H \rangle \Big|_{T=0} = \sum_{\ell, P} \frac{\hbar \omega_\ell}{2}} \quad \text{Startpunkt}$$

(13.) crosscheck: Orthonormalitätsbedingung
 für $\vec{A}(\vec{r}) \int d^3r |A(\vec{r})|^2 = 1$

$$E = \sum_{l,m,n} \sum_{\text{pol}} \hbar c \left[\frac{\pi^2 l^2}{L^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_z^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\vec{L}_x=L \quad \vec{L}_y=L$

Annahme: $L \gg \lambda, L \gg L_z = d$



$$E(d) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\text{pol}(n)} \frac{\hbar c}{2} \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}}$$

Polarisationssumme auswerten für diskrete Moden (n), für die kontinuierlichen spielt das Schreibbar keine Rolle [Rand des Integrals]

$$E(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2 2} \left\{ \underbrace{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{Fall } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}} \right\}$$

von Anfang an

$$E(\infty) = [L \gg \lambda, d \gg \lambda] = \frac{\hbar c L^2 d}{\pi^3} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$U(d) = E(d) - E(\infty)$$

$$= \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right\}$$

$$z = z' \frac{\pi}{d}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2$$

$$\begin{aligned}
 U(d) &= E(d) - E(\infty) = \\
 &= \frac{\hbar c L^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty dg \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{g^2 d^2}{\pi^2}} + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dg \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 g^2}{\pi^2} + n^2} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty dg \sqrt{dn} \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{d^2 g^2}{\pi^2} + n^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$g' = \frac{d^2 g}{\pi^2}, \quad dg' = \frac{d^2}{\pi^2} dg, \quad dg = \frac{\pi^2}{d^2} dg'$$

$$f(\xi) := \int_0^\infty dg' \sqrt{g' + \xi^2}$$

$$= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^2} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_0^\infty dn f(n) \right]$$

[genau: Schleife, Quantenoptik in Phasentransparenz]

$$f(x) = \int_0^\infty dg \sqrt{g+x^2} = \left[u=g+x^2 \quad \left. \begin{array}{l} u|_{g=0} = x^2 \\ u|_{g \rightarrow \infty} = \infty \end{array} \right] \right.$$

$$= \int_{x^2}^\infty du \sqrt{u} = \frac{1}{3/2} u^{3/2} \Big|_{x^2}^\infty$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{3} x^3 =: f(x)$$

Euler-Maclaurin-Formel

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{n=0}^\infty f(n) - \int_0^\infty dn f(n) \right\| &= -\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_0^\infty dn f(n) \\
 &= -\frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(d) &= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^3} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_0^\infty dn f(n) \right] \\
 &= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4 d^3} \left[-\frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$f(0)$ hebt sich weg

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^3 \right\}$$

eine Konstante
in x
 $\rightarrow 0$

$$= -2x^2$$

$$f''(x) = -4x, \quad f'''(x) = -4, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f'(x)|_{x=0} = 0, \quad f''(x)|_{x=0} = 0, \quad f'''(x)|_{x=0} = -4 //$$

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4d^3} \left[-\frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) \right]$$

$$= \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4d^3} \left(\frac{-4}{720} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720 d^3}$$

$$\text{der Druck } p = \frac{F}{A} = \frac{1}{L^2} \left(-\frac{\partial U}{\partial d} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240} \frac{1}{d^4} //$$

experimentell bestätigt //

ABER: heuristische Herleitung

• Euler-Maclaurin, die es nur bewiesen $f(\infty) \rightarrow 0$, also hier ungenügend

• $\frac{d}{dx} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \approx ???$

• beängstigend $\frac{1}{2} f(0)$

↑ Polarisationsabhängigkeit

und zwar nur für die diskreten Moden

\Rightarrow alles hängt davon ab, dass sich $f(0)$ heraushebt

Probleme: • Milonni führt cut-off ζ -Fkt. ein,
aber löst das Integral nicht,
sondern diszipliniert Integral weg
[Quantum vacuum, Buch]

- Euler-Maclaurin anwenden
nimm das Polarisationsproblem
- Kleinert erklärt den $\langle \mathbb{P} \rangle$ über
die Riemann-Zeta-Fkt.,
analytische Fortsetzung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \quad (s > 1)$$

zeigen (Analogieschluss),

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \hat{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$$

(Polemik)

\Rightarrow es kommt die richtige
Casimir-Polder-Kraft heraus //