

Von Neumann - Beweis II.

Wiederholung:

(N1) jede Observable hat einen Operator $\in \mathcal{H}$

(N2) Messung $f(\hat{O})$ führt auf $f(\langle \hat{O} \rangle)$, eindeutig

(N3) Superpositionsprinzip: $\langle aA + bB \rangle = a\langle A \rangle + b\langle B \rangle$

letzte Mal gezeigt, daraus allein folgt

$$\langle A \rangle = \text{tr}(gA) \quad \text{mit } g = g^\dagger$$

(verwendet: Linearität, Vollständigkeitsrelation, und Eindeutigkeitsrelation)

(i) g ist positiv definit $A = |\phi\rangle\langle\phi|$
 $A^2 = |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi| = A$, $|\phi\rangle$ beliebig
 $\langle R^2 \rangle \geq 0$, $0 \leq \langle R^2 \rangle = \langle R \rangle = \text{tr}(gR)$
 $= \langle \phi | g | \phi \rangle$

(ii) eindeutige Darstellung: $\langle R \rangle = \text{tr}(gR) = \text{tr}(g'R)$

$$R = |\phi\rangle\langle\phi| \Rightarrow \langle \phi | g - g' | \phi \rangle = 0$$

(folgt aus der Linearität)

(iii) $\Delta R > 0$ $\Delta R = \sqrt{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2}$
 $\langle R^2 \rangle = \langle R \rangle^2$ führt auf Widerspruch

$$R = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad R = R^2$$

$$\text{tr}(gR^2) = [\text{tr}(gR)]^2$$

$$\langle \phi | g | \phi \rangle = [\langle \phi | g | \phi \rangle]^2, \quad a = a^2$$

also muss $g = 0$, $g = \mathbb{1}$

sei $g = 0$: triviale Lösung (keine Information)

Sei $g = \mathbb{1}$: $\text{tr}(g) = 1$

d.h. $\text{tr}(\mathbb{1}) = 1$

aus Normierbarkeit für
 kontinuierliche Operatoren \hat{P}, \hat{x}
 nicht möglich

diskretes Beispiel: $P = c^\dagger c$, $c^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$

$$\langle (c^\dagger)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | (c^\dagger c)^2 | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \right) = \mathbb{1}$$

Zweifach Widerspruch konstruiert, d.h.
 wir finden im IR keine dispersions-
 freien Ensembles.

von Neumann: "Hence, within the limits of
 our conditions, the decision
 is made, and it is against
 causality because all
 ensembles have dispersion,
 even the homogeneous."

$$\Delta A > 0$$

aber nur unter der Bedingung, dass

$$\langle \alpha A + \beta B \rangle = \alpha \langle A \rangle + \beta \langle B \rangle \text{ gilt.}$$

Ansatz von Bell und Bohm war, eine
 Theorie zu konstruieren, für die die
 Linearität nicht gilt.

$$\langle A \rangle_{HVT} = \int d\vec{x} E(A_{\vec{x}})$$

↑
hidden variable

← Eigenwert von $A_{\vec{x}}$

Randbedingung $\langle A \rangle_{HVT} = \langle A \rangle_{QM}$

[N. David Mermin, "Hidden variables and the
 two theories of John Bell"
 Rev. Mod. Phys 65, 803 (1993)]

Wir betrachten $\dim[\mathcal{H}] = 2$ und $A \in \mathcal{H}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_0 \mathbb{1} + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = \frac{a_1 + a_4}{2}, \quad a_x = \frac{a_1 - a_4}{2} + \operatorname{Re}[a_3]$$

$$a_y = \operatorname{Im}[a_3]$$

$$a_z = \frac{a_1 - a_4}{2}$$

$$A = a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\langle \mathcal{N} | A | \mathcal{N} \rangle = \langle \mathcal{N} | a_0 \mathbb{1} | \mathcal{N} \rangle + \langle \mathcal{N} | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} | \mathcal{N} \rangle$$

$$= a_0 + |\vec{a}| \langle \mathcal{N} | \vec{n} \cdot \vec{\sigma} | \mathcal{N} \rangle$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

$$\det[\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \lambda \mathbb{1}] \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{cases} \lambda^2 - |\vec{n}|^2 = 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0, \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

$$\det[a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} - \lambda \mathbb{1}] \stackrel{!}{=} 0$$

$$= a_0 \det \mathbb{1} + |\vec{a}| \det[\vec{n} \cdot \vec{\sigma} - \lambda \mathbb{1}] = 0$$

$$E(A) = a_0 \pm |\vec{a}|$$

$$\langle \mathcal{N} | \vec{a} \cdot \vec{\sigma} | \mathcal{N} \rangle = \quad , \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{n} | \mathcal{N} \rangle = (\pm 1) | \mathcal{N} \rangle$$

$$= \langle \mathcal{N} | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) | \mathcal{N} \rangle = \langle \mathcal{N} | [\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \mathbb{1} + i (\vec{a} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}] | \mathcal{N} \rangle$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{n} + i \underbrace{\langle \mathcal{N} | (\vec{\sigma} \times \vec{n}) \cdot \vec{a} | \mathcal{N} \rangle}_{= 0} = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

$$\langle A \rangle_{\text{em}} = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ hängt ab vom jeweiligen Erzeugnis})$$

$$\langle A \rangle_{HVT} = \int d\vec{x} E(A_{\vec{x}})$$

$$E(A_{\vec{x}}) = \begin{cases} a_0 + |\vec{a}|, & \text{wenn } (\vec{x} + \vec{n}) \cdot \vec{a} > 0 \\ a_0 - |\vec{a}|, & \text{wenn } (\vec{x} + \vec{n}) \cdot \vec{a} \leq 0 \end{cases}$$

$$\langle A \rangle_{HVT} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, r^2 \sin\vartheta E(A_{\vec{x}})$$

↑
wählen wir "1"

wählen wir $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_z$

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{n}) = |\vec{a}| (\lambda_z + n_z)$$

$$\lambda_z = \cos\vartheta \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{n}) = |\vec{a}| (\cos\vartheta + n_z)$$

Sei ϑ_0 so, dass $\cos\vartheta_0 = -n_z$ ($|n_z| \leq 1$)

$$\vartheta \in [0, \vartheta_0] \quad \cos\vartheta + n_z \geq 0$$

$$\vartheta \in (\vartheta_0, \pi] \quad \cos\vartheta + n_z < 0$$

$$\langle A \rangle_{HVT} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \sin\vartheta E(A_{\vec{x}}) \quad \leftarrow a_0 + |\vec{a}| \right. \\ \left. + \int_{\vartheta_0}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta E(A_{\vec{x}}) \quad \leftarrow a_0 - |\vec{a}| \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(a_0 + |\vec{a}|) \underbrace{[-\cos\vartheta]_0^{\vartheta_0}}_{= -n_z - (-1) = n_z + 1} + (a_0 - |\vec{a}|) \underbrace{[-\cos\vartheta]_{\vartheta_0}^{\pi}}_{= 1 - n_z} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \{ \cancel{a_0 n_z} + |\vec{a}| (n_z + \cancel{a_0} + \cancel{|\vec{a}|} + \cancel{a_0} - \cancel{|\vec{a}|}) - \cancel{a_0 n_z} + \cancel{|\vec{a}|} n_z \}$$

$$= a_0 + |\vec{a}| n_z = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n} = \langle A \rangle_{QM}$$

⇒ also haben wir eine HVT konstruiert mit $\vec{\lambda}$ als freien Parameter

$$\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$

$$E(A+B) \neq E(A) + E(B)$$

$$A = \sigma_x, \quad B = \sigma_y, \quad C = \sigma_x + \sigma_y = A + B$$

$$E(A) = \dots \quad \det(\sigma_x - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{matrix} \lambda_A = \pm 1 \\ \lambda_B = \pm 1 \end{matrix}$$

$$\det(\sigma_x + \sigma_y - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\det(\vec{n} \cdot \vec{\sigma} - \lambda \tilde{I}) = 0 \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \quad \hat{\lambda} = \pm 1 \quad \lambda_C = \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} E(A) + E(B) &= (\pm 1) + (\pm 1) = \{0, 2, -2\} \\ &\stackrel{!}{=} E(A+B) = \pm \sqrt{2} \quad \text{falsch!} \end{aligned}$$

⇒ also muss ich nur eine HVT aus Eigenwerten konstruieren, um „über“ von Neumann hinauszugehen

jetzt kam Bell: „Kann ich trotzdem bestimmte HVT ausschließen?“

[Franco Selleri „Quantum Paradoxes and Physical Reality“, Dordrecht 1980]

BELLSCHE UNGLEICHUNG

System präparieren und zwar in einem

$$\text{Singlett-Zustand } |\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_{(1)} |\downarrow\rangle_{(2)} - |\downarrow\rangle_{(1)} |\uparrow\rangle_{(2)} \}$$

(hat kein Drehmoment)

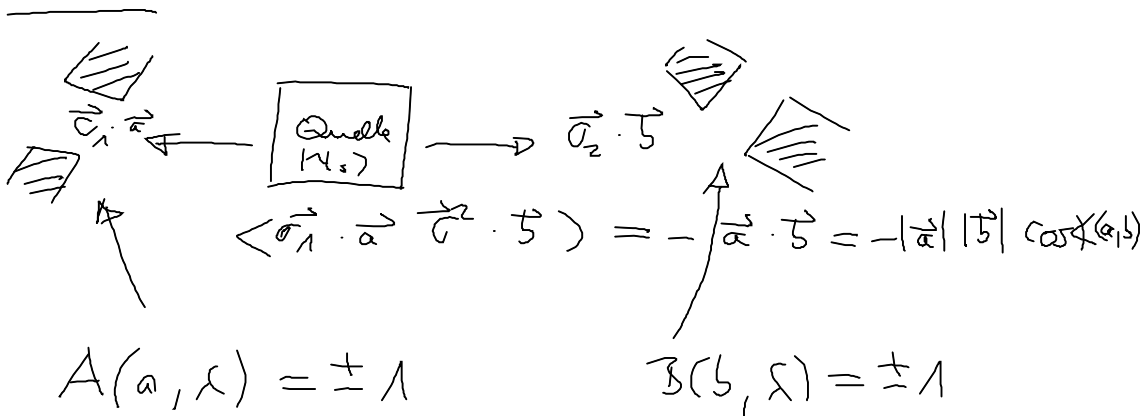
- Messergebnisse für Spin ± 1
- perfekte Antisymmetrie, d. h. $A(a, b) = -B(a, b)$

$$\langle \mathcal{N}_1 | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} | \mathcal{N}_s \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

- perfekte Detektor-effizienz

Folgerung: $|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$
 (das wird gezeigt) [Bellsche Ungleichung]

$P(\vec{a}, \vec{b}) \neq -\vec{a} \cdot \vec{b}$ d. h. nicht beliebige
 quantenmechanische
 Erwartungswerte werden
 reproduziert!



klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(a, b) = \int d\lambda g(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda)$$

Randbedingung $\int d\lambda g(\lambda) = 1$

$$1 \geq P(a, b) \geq -1$$

$$P(\vec{a}, \vec{a}) = -1$$

für \vec{a} beliebig

$$A(a, \lambda) = -B(a, \lambda)$$

$$P(a, b) = - \int d\lambda g(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda)$$

Messapparatur am Ort a
und b ist gleich

$$P(a, b) - P(a, c) = - \int d\lambda g(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) + \int d\lambda g(\lambda) A(a, \lambda) A(c, \lambda)$$

$$= - \int d\lambda g(\lambda) [A(a, \lambda) A(b, \lambda) - A(a, \lambda) A(c, \lambda)]$$

$$= - \int d\lambda g(\lambda) [A(a, \lambda) A(b, \lambda) - A(c, \lambda) [A(b, \lambda)]^2 A(c, \lambda)]$$

$$= - \int d\lambda g(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)]$$

$$|P(a, b) - P(a, c)| = \left| - \int d\lambda g(\lambda) \dots \right|$$

$$\leq \int d\lambda | \dots |$$

$$\leq \int d\lambda \underbrace{|g(\lambda)|}_{\geq 0} \underbrace{A(a, \lambda) A(b, \lambda)}_{=1} |1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)|$$

$$= \int d\lambda g(\lambda) [1 - A(b, \lambda) A(c, \lambda)]$$

$$= 1 - \int d\lambda g(\lambda) A(b, \lambda) A(c, \lambda)$$

$$= 1 + P(b, c)$$

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$

Bellsche Ungleichung