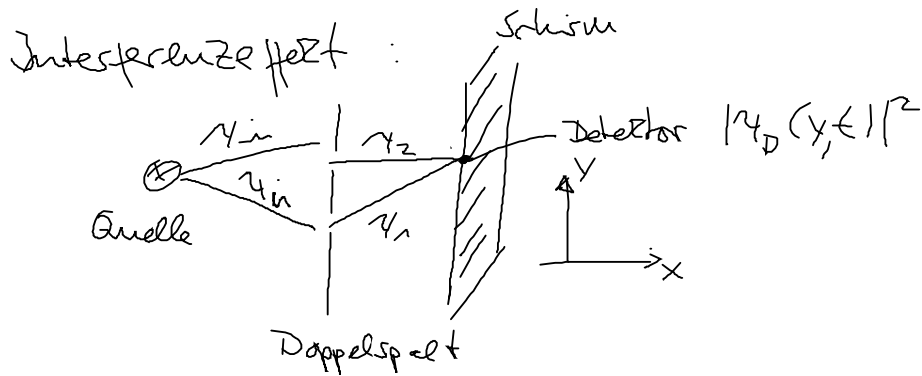


Aharonov-Bohm-Effekt: (heuristische Herleitung)

["Significance of electromagnetic potentials in quantum theory" Phys. Rev. 115, 485 (1959)]



$$|\psi_D(x, t)|^2 = |\psi_1(r, t) + \psi_2(r, t)|^2 \quad (\text{Huygens Prinzip})$$

$$= |c_1 e^{i\varphi_1} + c_2 e^{i\varphi_2}|^2$$

seien die Schlitze identisch (im Mittel) $c_1 = c_2$

$$|\psi_D(t, y)|^2 = |c|^2 |e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}|^2$$

$$= |c|^2 |e^{i\varphi_2} (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)/2} + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2})|^2$$

$$= |c|^2 |e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)/2}|^2 = 4|c|^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

(1.) freie Bewegung unserer Partikel

$$\psi_1(\vec{r}, t) = c_1 e^{i/\hbar \vec{p}_1 \cdot \vec{r}} \quad \vec{p} = \hbar |\vec{k}_1| \vec{e}_x$$

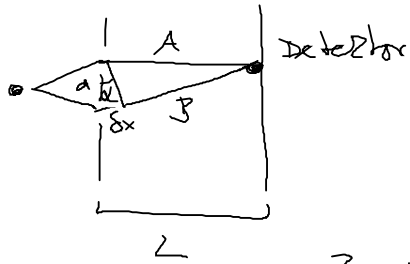
$$\vec{k} \varphi_1 = \frac{\vec{k}}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{r} \rightarrow \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} s_1$$

(löst unsere freie Schrödingergl.)

(2) einlaufende ψ_{in} besitzt selbe Phase

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$$

(3.) Phasenunterschied nur durch Gangunterschied erzeugt



$$\delta x = d \sin \alpha$$

$$r_1 - r_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (s_1 - s_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta x$$

$$d^2 + L^2 = (\delta x + L)^2$$

$$\delta x = -L \pm \sqrt{d^2 + L^2}$$

$$\delta x > 0 \quad \delta x = \sqrt{L^2 + d^2} - L \geq 0$$

$$= L \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2} - 1 \right)$$

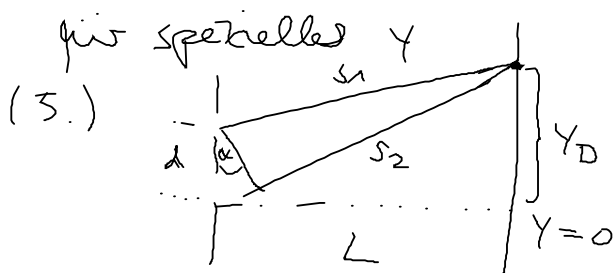
$$\sqrt{1 + \epsilon^2} \quad \text{für kleine } \epsilon^2 = \frac{d^2}{L^2}$$

$$\sqrt{1 + \epsilon^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} (1 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} 2\epsilon \Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}^{\epsilon} \frac{\epsilon}{1!}$$

$$+ \left[\epsilon \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} 2\epsilon + (1 + \epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{\epsilon^2}{2!}$$

$$= 1 + \frac{\epsilon^2}{2}, \quad \text{d.h. } \delta x = L \left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}} - 1 \right)$$

$$\simeq L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d^2}{L^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{L}$$



$$d \ll L$$

$$\delta x = \frac{y_D d}{L} - \mathcal{O}(d^2)$$

$$(6.) \quad |\psi_D(y_D, t)|^2 = |\zeta c|^2 \cos^2 \left[\frac{\pi}{L} \frac{y_D d}{\lambda} \right]$$

Maximas nur bei diskreten γ_D ,
 und zwar, wenn $\gamma_D = n \lambda \frac{L}{d}$

Frage: was passiert, wenn es ein nicht
 verschwindendes Vektorpotential gibt?

Bewegung nicht mehr.

Schrodinger lautet nun $i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \psi$



$$|\psi|^2 = |\psi' e^{i\varphi}|^2 = |\psi' e^{i\varphi(\vec{r}, t)}|^2$$

Eichinvarianz der Schrodingergleichung
 ist spektakular: Ladungserhaltung

Wir setzen $\psi_D'(\vec{r}, t) = \psi_D(\vec{r}, t) \exp[i\chi(\vec{r})]$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A} + \frac{\hbar}{q} \nabla \chi(\vec{r}) \quad (\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}' = \vec{B})$$

$$\chi(\vec{r}) = -\frac{q}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \quad [\vec{r}' = (x', y', z')]$$

$$= -\frac{q}{\hbar} \left[\int_0^{r_x} dx' A_x'(\vec{r}') + \int_0^{r_y} dy' A_y'(\vec{r}') + \dots \right]$$

$$\nabla \chi(\vec{r}) = -\frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{r})$$

$$\text{Erläut. } \psi_D = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p - q\vec{A}) \psi_D \rightarrow \text{Erläut. } \psi_D' = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\vec{p} - q\vec{A}') \psi_D'$$

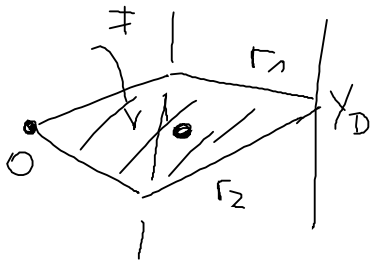
$\vec{A}' = 0$

Ausgangspunkt: $\text{Erläut. } \psi_D' = \frac{1}{\sqrt{2m}} \psi_D'$

$$\psi_D(\vec{r}_1, t) = c_{1, \text{exp}} \left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 - \frac{q}{\hbar} \int_0^{r_1} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \right] + (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\stackrel{q=2}{=} c e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_0^{r_2} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}')} \left[e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 - \frac{i}{\hbar} q \left\{ \int_0^{r_1} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') - \int_0^{r_2} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \right\}} \right]$$

$$+ e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2}$$



geschlossener Weg, weil r_1 und r_2 bei 0 anfangen und beim Detektor enden

$$|\psi_D(y_D)|^2 = |c|^2 \left| e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 - \frac{i}{\hbar} q \int_0^{r_1} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}')} + e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2} \right|^2$$

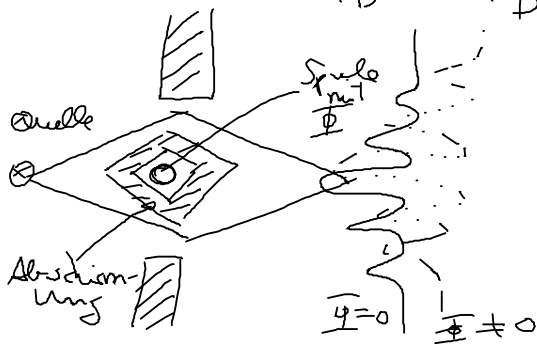
$$\oint_{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') = \int_{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \nabla \times \vec{A} = \int d\vec{r} \cdot \vec{B} = \Phi$$

$$\left(= \int_{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \nabla \times \vec{A}' = \Phi \right)$$

$$|\psi_D(y_D)|^2 = |2c|^2 \cos^2 \left(\frac{\psi_1 - \psi_2 - \frac{q}{\hbar} \Phi}{2} \right)$$

\Rightarrow Maxima werden verschoben um $\Delta\varphi_B = -\frac{q\Phi}{\hbar}$

$$\varphi_D = n\lambda \frac{L}{D} + \frac{q}{\hbar} \Phi$$



verschiebt sich
 proportional zum
 Strom durch die
 Spule

(Tononuma 1984)

- (i) Interferenzeffekt unabhängig von direktem Magnetfelderinfluss (nichtlokaler Effekt)
- (ii) Verschiebung aber unabhängig von gewählter Eichung.
 Was gemessen wird ist $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{B} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{A}(\vec{r})$
- (iii) Wenn $\frac{q}{\hbar} \Phi = n\pi$, dann verschwindet der Shift $\Delta\varphi_B = 0$, d.h. der AB-Effekt deutet als Stromstärke Normel, denn $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{B}$ hängt vom Strom ab
 verwandt mit dem SQUID
 (superconducting quantum interference device)

Probleme:

- wie sieht Vektorpotential der idealisierten Spule?
- kann bei bekanntem Vektorpotential eine geeignete Eichung finden?

\rightarrow ursprüngliche Rechnung von Aharonov und Bohm (idealisierte Spule)

- .. wie sieht eine realistische Spule (das ist der Aharonov) ?
- .. wichtig für die Interpretation