

4. Stokes-Gleichungen

- wichtig für Welt der kleinen Reynoldszahlen
- " für Strömungsfelder auf Mikro-/Nanoskala, insbesondere Mikro-/Nanofluidik!

- Voraussetzung:

$$Re = \frac{\rho v_0 l}{\eta} \ll 1 \xrightarrow{(3.68)} \text{vernachlässige } \underline{v \cdot \nabla v} \quad \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\text{auf Zeite } t \gg \tau_H = \frac{l^2}{6\nu/g}$$

→ stationäres Geschw. feld auf Länge l_H

$\text{div } \underline{v} = 0 \rightarrow$ inkompressible Flüssigkeit

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (+g \underline{b}) \\ 0 = \text{div } \underline{v} \end{array}} \quad (4.1)$$

and: „creeping-flow“ Gleichungen

4.1 Extremalprinzip

- wichtiges Prinzip in Physik!
- hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = T \dot{G}$ für $T = \text{konst.}$:

$$W \stackrel{(3.6)}{=} \int \text{Sp } \underline{\underline{I}}' \underline{\underline{A}} d^3x = 2\eta \int \text{Sp } \underline{\underline{A}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2 d^3x \quad (4.2)$$

$$\underline{\underline{I}}' = 2\eta \underline{\underline{A}}$$

$$[\text{Sp } \underline{\underline{A}} = 0]$$

- Extremalprinzip: unter Nebenbedingung $\text{div } \underline{v} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} S(W - 2 \int p \text{div } \underline{v} d^3x) = 0 \\ \text{Druck } p = \text{Lagrangeparameter} \end{array}} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \\ \text{Randbedingung:} \\ 1. \underline{v} = 0 \dots \text{haftend} \\ \text{oder} \\ 2. \left. \begin{array}{l} T_{ij} n_j \\ \frac{\partial v}{\partial n} \end{array} \right| = 0 \end{array} \quad (4.3)$$

"Oberfläche ist kraftfrei"

Beweis: s. Übung

stationäre Strömungsprofile stellen sich so ein, daß ψ ein Extremum annimmt

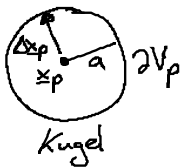
4.2 Biharmonische Gleichung

Herleitung:

$$\text{div}(\underline{\underline{0}} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}) \xrightarrow{\text{div } \underline{v} = 0} \begin{cases} \nabla^2 p = 0 & (4.4a) \\ \nabla^2 \nabla^2 \underline{v} = 0 & (4.4b) \end{cases}$$

NB: separate Gln. für \underline{v} und p !

Hilfssatz:



Oberflächenintegral: $\underline{v}(\underline{x})$ löse Stokes-Gln. (4.1)

$$\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x}) d\mathcal{F} = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p) \quad (4.5)$$

Beweis: verwendet Gl. (4.4b)

(1) Taylor $\frac{\Delta x_p}{\underline{x} - \underline{x}_p} \rightarrow \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta x_p \cdot \nabla_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2} (\Delta x_p \otimes \Delta x_p) \cdot (\nabla_p \otimes \nabla_p) \underline{v}(\underline{x}_p) + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta x_p)^n \cdot \nabla_p^n \underline{v}(\underline{x}_p)$

(2) $\frac{1}{4\pi a^2} \int \underline{v}(\underline{x}) d\mathcal{F} \rightarrow$

(i) $\int (\Delta x_p)^n d\mathcal{F} = 0$, n ungerade
 [Δx_p und $-\Delta x_p$ kommen vor]

(ii) $\int (\Delta x_p \otimes \Delta x_p) d\mathcal{F} = \frac{4\pi}{3} a^4 \underline{1}$

$$\left[\begin{array}{l} (\Delta x_{p,i} \Delta x_{p,j}) \\ \exists! (\Delta x_{p,i})^2 \\ = |\Delta x_p|^2 = a^2 \end{array} \right]$$

denn: $c \underline{1}$, wegen Isotropie der Oberfläche, keine Richtung ist ausgezeichnet

$\text{Sp}(\dots) \rightarrow 3c = a^2 \int_{\partial V} d\mathcal{F} = 4\pi a^4$

$\rightarrow c = \frac{4\pi}{3} a^4$

(iii) $\int (\underbrace{\Delta x_p \otimes \Delta x_p \otimes \dots}_{n\text{-mal}}) d\mathcal{F} \sim 1^{n/2} = 1 \otimes 1 \otimes \dots$

Isotropie

$\xrightarrow{\text{in (1)}} \dots \nabla_p^2 \nabla_p^2 \dots \underline{v}(\underline{x}_p) = 0$

(1) & (2) \rightarrow (4.5)

4.3 Oseen-Tensor

• (4.1) \equiv lineare Dgl. in v und $p \rightarrow$ Methode der Grenzfunktion (Superpositionsprinzip!)

\rightarrow Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $g \in G(x)$:

$$\begin{cases} v(x) = \int d^3x' \underline{O}(x-x') g(x') \\ p(x) = \int d^3x' g(x-x') \cdot g(x') \end{cases} \quad (4.6)$$

mit $\underline{O}(x-x')$... Oseen-Tensor } Grenzfunktion
 $g(x-x')$... Druck-Vektor }

NB: (i) \underline{O} ... Tensor 2. Stufe
 (ii) g ... Vektor

• Bedingungsgh. für \underline{O} und g :

(4.6) in (4.1)

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = \int d^3x' \{ -\nabla [g(x-x') \cdot g(x')] + \eta \nabla^2 [\underline{O}(x-x') g(x')] \} + g(x) \\ 0 = \int d^3x' \text{div} [\underline{O}(x-x') g(x')] \end{cases}$$

$$\begin{matrix} g(x) \\ = e S(x) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = -\nabla [g(x) \cdot e] + \eta \nabla^2 [\underline{O}(x) e] + e S(x) \\ 0 = \text{div} [\underline{O}(x) e] \end{cases}$$

$$\begin{matrix} e \text{ beliebig} \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \nabla \otimes g(x) - \eta \nabla^2 \underline{O}(x) = \underline{1} S(x) & (4.7a) \\ \text{div} \underline{O}^t = \underline{0} & (4.7b) \end{cases}$$

• Lösung: für $V \rightarrow \infty$, $v|_{\partial V} = 0$... unendliches Volumen

(i) Druck-Vektor g :

$$\text{div} [(4.7a)^t] \quad \& \quad \text{div} \underline{O}^t = 0$$

erhalte mit ∇ kontrahieren

$$\rightarrow \nabla^2 g(x) = \nabla S(x) \quad (4.8)$$

Einschlub: Elektrostatik $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x), \quad r = |x| \quad (4.9)$

\uparrow
Grenzfkt. der Poisson-Gl.

∇ (4.9) & vgl. mit (4.8)

$$\rightarrow \boxed{g(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$$

... „Dipol“

Beweis: $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{\underline{x}}{r^3}$ ged

$\underline{x} = \frac{\underline{x}}{r} r$

(ii) Oseen-Tensor \underline{Q} :

(4.10) in (4.7a)

$$-\frac{1}{4\pi} (\nabla \otimes \nabla) \frac{1}{r} - \eta \nabla^2 \underline{Q}(\underline{x}) = \underline{1} \delta(\underline{x}) \quad (4.11)$$

Ansatz: $\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\eta} (\underline{1} \underline{1} + \tilde{\underline{Q}})$ (4.12)

in (4.11)
 $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} = \delta(\underline{x})$ $\nabla^2 \tilde{\underline{Q}}(\underline{x}) = -(\nabla \otimes \nabla) \frac{1}{r} \stackrel{\text{o.B.}}{=} \frac{1}{r^3} \underline{1} - 3 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^5}$ (4.13)

Ansatz: $\tilde{\underline{Q}} = \frac{1}{r} (c_1 \underline{1} + c_2 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2})$ in (4.13)

$$\rightarrow \tilde{\underline{Q}} = \frac{1}{2r} \left(\frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} - \underline{1} \right) \quad (4.14)$$

(4.12) & (4.14)

$$\boxed{\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\underline{1} + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right)} \quad (4.15)$$

... Oseen-Tensor

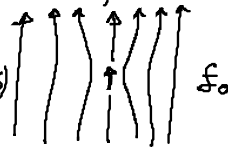
• Geschw. feld einer „Punktquelle“: $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{f}_0 \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$

in (4.6)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \int \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}') \underline{g}(\underline{x}') d^3 \underline{x}'$$

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_0) \underline{f}_0} \quad (4.16)$$

... „Stokeslet“



Anisotropie:

(i) $\underline{x} - \underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \rightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}, r = |\underline{x} - \underline{x}_0|$

(ii) $\underline{x} - \underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \rightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}$

NB: allgemein: $\underline{v}(\underline{x}) =$ Superposition von Stokeslets

• wichtige Anwendg.: hydrodynam. Wechselwirkungen (HW)
s. Kap. 6