11. Allgemeine Beschreibung stochastischer Prozesse

- Motivation:
  (i) allgemeine Theorie der stochast. Differentialgl. (SDG)
  $\Gamma(t)$ ... stochastische Kraft
  (ii) Ito-/Stratonovich-Interpretation
  (iii) Herleitung der Fokker-Planck-Gl.

11.1 Stochastische Differentialgleichung I

- allgemeine 1D-Langevin-Gl. = SDG:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = h(x,t) + g(x,t)\,\Gamma(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t-t') \end{aligned}} \qquad (11.1)$$

<u>Bem:</u> (i) $\Gamma(t)$ ... Gaußsches weißes Rauschen

durch $\langle \Gamma\Gamma \rangle$ bestimmt $\qquad \langle \Gamma\Gamma \rangle = \delta(t-t')$

(ii) g ... Stärke von $\Gamma(t)$

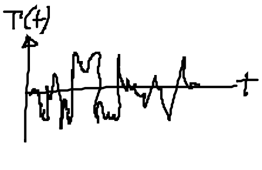
(iii) nicht unbedingt therm. Ursprungs $\qquad$ Bsp: aktive Teilchen, Mikroorganismen

(iv) $g = g(t)$ .... additives Rauschen
$g = g(x,t)$ ... multiplikatives "

- formale Integration: $\int_t^{t+\tau} (11.1)\, dt$

$$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,\Gamma(t')\,dt' \qquad (11.1b)$$

Problem:



... hochgradig irregulär, Korrelationszeit = 0!

$\longrightarrow \int_t^{t+\tau} \ldots \Gamma(t')\,dt'$ <u>nicht</u> definierbar

• Ausweg:

(i) Betrachte: $h = 0$, $g = 1$

(11.1) $\longrightarrow$ Brownsche Bewegung:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = \Gamma(t) \\ &\text{mit } \langle x(t)\rangle = 0, \quad x(0) = 0 \\ &\qquad \langle [x(t+\tau) - x(t)]^2 \rangle = \tau \\ &\text{bzw.: } \langle x(t+\tau)\, x(t)\rangle = t \end{aligned}} \qquad (11.2)$$

Beweis: (1) $\langle [\ldots]^2 \rangle$ ... s. (10.23) ($m=0$) $\gamma\dot{x}$ ... $= \Gamma(t)$

$\langle \Gamma\Gamma \rangle = 2k_B T \gamma\, \delta(t_1 - t_2)$

(10.25) $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, $D = \frac{k_B T}{\gamma}$

jetzt: $\gamma = 1$, $k_B T = \frac{1}{2} \longrightarrow D = \frac{1}{2}$ ✓

(2) $\langle x(t+\tau)\, x(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle x^2(t+\tau) + x^2(t) - [x(t+\tau) - x(t)]^2 \rangle\right]$

$\overset{(11.2)}{=} \frac{1}{2}\left[t + \tau + t - \tau \right] = t$ qed

$\longrightarrow$ andere Sichtweise auf (11.1b)

(ii) Führe ein: $\boxed{W(\tau) = x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} \Gamma(t')\, dt'}$ (11.3)

Bem: (1) stochastische Variable, gleiche Moment wie x von Brownscher Bewegung

(2) glattere Funktion als $\Gamma(t)$!

definiere:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Wiener Prozeß:} \\ &\text{stochastische Variable } W(t) \\ &\text{mit } \quad W(0) = 0 \\ &\qquad \langle W(t)\rangle = 0, \quad \langle W(t+\tau)\, W(t)\rangle = t, \quad \tau \geq 0 \end{aligned}} \qquad (11.4)$$

NB: formal $dW =$ „$\Gamma(t)\, dt$", aber $\dot{W} = \Gamma(t)$ existiert nicht!

denn: $\dot{W} \sim \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \underset{\text{„verhält sich wie"}}{\simeq} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \longrightarrow \infty, \quad \varepsilon \to 0$

$\longrightarrow$ Wiener-Prozeß ist nicht differenzierbar

(iii) also: (11.16)

$$\boxed{x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,dW(t')} \qquad (11.5)$$

stochastische Variable: $x(t')$
ist Funktion von $W(t)$!

Integration?

11.2 Integrale nach Ito & Stratonovich

· Definitionen der Integration:

Beachte: $\int_0^t \dots \, dW(t')$ mit $N+1$ Stützstellen t_i, $i=0,\dots,N+1$

Δt

$t_0=0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t=t_{N+1}$

(i) nach Ito:

$$\boxed{\begin{aligned} A_I &= \int_0^t g[x(t'),t']\,dW(t') \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{i=0}^{N} g[x(t_i),t_i]\,\underbrace{[W(t_{i+1})-W(t_i)]}_{\Delta W(t_i)} \end{aligned}} \qquad (11.6)$$

NB: g am Anfang des Δt-Intervalls

(ii) nach Stratonovich:

$$\boxed{\begin{aligned} A_S &= \int_0^t g[x(t'),t']\,dW(t') \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{i=0}^{N} g\left(\frac{x(t_i)+x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)[W(t_{i+1})-W(t_i)] \end{aligned}} \qquad (11.7)$$

NB: g in der Mitte des Δt-Intervalls!

Bem: (1) gewöhnliche Riemannsche Integrale: $A_I = A_S$
hier nicht: s.u.

(2) A_I ist stochast. Variable!

Sichtweise:

Integrale A_I, $\bar{A}_I = \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{i=0}^{N} f[x(t_i), x(t_{i+1}), W(t_i), W(t_{i+1}), t_i, t_{i+1}]$

sind identisch, falls mittlere quadratische Abweichung $\langle (A_I - \bar{A}_I)^2 \rangle = 0$

Bsp: s.u.

ebenso für A_S

- **Beispiel:** Berechne $\int_0^t W(t')\,dW(t')$

(i) $A_I = \sum_{i=0}^{N} W(t_i)\,\underbrace{[W(t_{i+1})-W(t_i)]}_{\Delta W(t_i)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\left\{\underbrace{[W(t_i)+\Delta W(t_i)]^2}_{W^2(t_{i+1})} - W^2(t_i) - \Delta W^2(t_i)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[W^2(\underset{\uparrow \atop t}{t_{N+1}}) - \underbrace{W^2(0)}_{=0}\right] - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=0}^{N}\Delta W^2(t_i)}_{\text{Berechne im Mittel!}}$$

$$\left\langle \sum \Delta W^2(t_i)\right\rangle = \sum \left\langle [W(t_{i+1})-W(t_i)]^2\right\rangle$$

$$= \sum_i \left\langle W^2(t_{i+1}) - 2W(t_{i+1})W(t_i) + W^2(t_i)\right\rangle$$

$$= \sum_i \underbrace{(t_{i+1} - 2t_i + t_i)}_{\Delta t} = t$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} A_I = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2} \\ \text{insbes.: } \langle A_I\rangle = 0 \end{array}} \quad (11.8)$$

(ii) $A_S = \sum_{i=0}^{N} \frac{W(t_i)+W(t_{i+1})}{2}\,[W(t_{i+1})-W(t_i)]$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\left[W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)\right]$$

$$\xrightarrow{\text{s.o.}} \boxed{\begin{array}{l} A_S = \frac{1}{2}W^2(t) \neq A_I \\ \text{insbes.: } \langle A_S\rangle = \frac{t}{2} \end{array}} \quad (11.9)$$

NB: bei Stratonovich: Integrationsregel wie bei Riemann-Integral

bei Ito: andere Regeln!

11.3 Stochastische Differentialgleichung III

• verschiedene Interpretationen der SDG:

(i) Ito-Interpretation: (11.5) mit $\tau = dt \to 0$, $t' = t$

$$\to \quad x(t+dt) = x(t) + h(x,t)\,dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t\,!!\ \hat{=}\ \text{Ito}}\,dW(t) \qquad (11.10)$$

Führe ein:

wegen $\langle dW^2(t)\rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2\rangle \overset{(11.4)}{=} t+dt+t-2t = dt$

$$\boxed{dW(t) = dw\,\sqrt{dt}} \qquad (11.11)$$

$$\to \quad \boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\,\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \qquad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

Bem: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

$\langle\ldots\rangle$ aus (11.4) mit (11.11)

(ii) Stratonovich-Interpretation:

Schreibe formal:

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\,\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle dw^2\rangle = 1 \end{aligned}} \qquad (11.13)$$

verwende Stratonovich-Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation