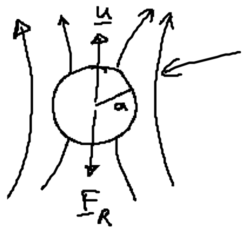
NS-Gl.:

$$\varrho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}p + \eta\underline{\nabla}^2\underline{v} + (\eta+\eta')\underline{\nabla}(\operatorname{div}\underline{v}) + \varrho\,\underline{b} \quad (3.62)$$

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

- konstantes T: nur NS-Gleichg, keine Energiebilanz nötig
- Motivation:
  (1) hydrodynam. Moden der NS-Gln = Störungen um den homogenen Grundzustand
  (2) Stokes-Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a\,\underline{u}$



mit Kugel mitbewegtes statisches Geschw. profil

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

- Zerlegungssatz für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{v}(\underline{x},t) \text{ ist bestimmt durch seine Wirbel rot } \underline{v},\\ \text{seine Quelle div } \underline{v} \text{ und ein Anteil } \underline{v}_R \text{ mit}\\ \operatorname{div}\underline{v}_R = \operatorname{rot}\underline{v}_R = 0, \text{ um die Randbed. zu erfüllen}\end{array}}$$

a) Wirbel:

- Voraussetzg: $Re \ll 1 \longleftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}v$; $\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho \approx \varrho_0$ } linearisiere in $\underline{v}$ & ϱ

mit rot(3.62) & rot $\underline{\nabla}\ldots = 0$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\varrho_0}\underline{\nabla}^2\right)\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{b}} \quad (3.72)$$

... Diffusionsgleichg für Wirbel/Vortizität

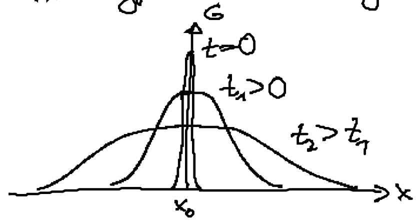
$\frac{\eta}{\varrho_0}$ .... Diffusionskonstante für Wirbel

- Greensche Fkt.: $\operatorname{rot}\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}$

... bei $t=0$ initiierter „pkt. förmiger" Wirbel

$\xrightarrow[\text{o.B.}]{\text{Lsg. von (3.72)}}$ $$\boxed{\underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{(4\pi\frac{\eta}{\varrho_0}t)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\varrho_0\, t}}} \quad (3.73)$$

... diffusive Ausbreitung des Wirbels



$$\left.\begin{array}{l} \text{mit } \lim\limits_{t\to 0} \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \hat{\underline{\nu}}\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0) \\ \text{Normierung: } \int G(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = \hat{\underline{\nu}},\quad t\geq 0 \end{array}\right\} (3.74)$$

- Folgerung:

mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels
= mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von $\underline{x}_0$

$$\boxed{\langle(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\rangle = \int(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\, G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = 6\,\frac{\eta}{\varrho_0}\,t}$$

2× Raumdimension   Diffusionskonstante   diffusive Ausbreitung

Beweis: Übungen

hydrodynam. Zeitskala:
mit l_H ... charakt. Länge

$$\longrightarrow \boxed{\tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\varrho_0}} \quad (3.76)$$

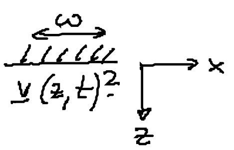
Bsp.: $l_H^2 = (1\mu m)^2$, $\eta = 10^{-3}\frac{kg}{ms}$, $\varrho_0 = 1\frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$

$$\longrightarrow \tau_H = 10^{-7}\,s\ !$$

- planare Geometrie (1):

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{b} = \delta(z-z_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}} \longleftrightarrow G(z-z_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\varrho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\varrho_0\, t}}} \quad (3.77)$$

- planare Geometrie (2):



$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x \qquad$ [div $\underline{v} = 0$!]

div $\underline{v} = 0$, $\underline{6} = 0$ in (3.62): $\quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(z,t) = 0}$ (3.78)
[p = konstant]

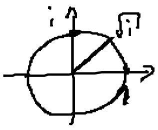
Ansatz: $\quad v(z,t) = v(\omega, z)\, e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\longrightarrow \left(i\omega - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(\omega, z) = 0 \quad (3.79)$$

$$\longrightarrow v(\omega, z) = v(\omega, 0)\, e^{-\sqrt{i\omega\frac{\rho_0}{\eta}}\, z}$$

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \longrightarrow \quad \boxed{v(\omega, z) = v(\omega, 0)\; e^{-(1+i)\, z/\delta}}$

exp Abfall $\quad$ Oszillation

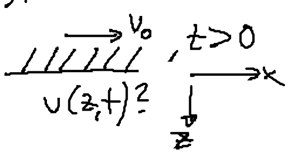


Eindringtiefe der Oszillation: $\quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0}}}$ (3.81)

$\delta \longrightarrow \infty$, $\omega \longrightarrow 0$!!
$\delta \rightarrow 0$, $\omega \longrightarrow \infty$

· planare Geometrie (3):

$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$



Randbed.:
(1) $v(0,t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ v_0, & t > 0 \end{cases}$

(2) $v(z,0) = 0$, $z > 0$

Lsg.: Superpositionsprinzip!

Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\; 2\,\underbrace{\Theta(-z_0)}\; G(z - z_0, t) \qquad (3.82)$$

$\hookrightarrow$ Stufenfkt.: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denn: erfüllt Randbed.:

$$v(0,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\; 2\Theta(-z_0)\, G(-z_0, t) \overset{t>0}{=} v_0$$

– Normierung von G (3.74)
– Symmetrie bzgl. $z_0 = 0$

$$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\; 2\Theta(-z_0)\, \delta(z - z_0) = v_0\, 2\Theta(-z) = 0\,, \quad z > 0$$

also: $v(z,t) \overset{(3.82)}{=} 2v_0 \int\limits_{-\infty} \underbrace{G(z-z_0,t)}_{= \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\eta}{\rho_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}}} dz_0$

$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}} \longrightarrow$ $du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}$

$$\boxed{v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}^{\infty} e^{-u^2}\, du} \quad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}$: $v(z,t) \approx 0$

(2) $z \ll \sqrt{\;\text{"}\;}$: $v(z,t) = v_0$

$\longrightarrow$ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\eta/\rho_0} \,\hat{=}\, \tau_H$!!

$\longrightarrow$ $\tau > \tau_H$ ... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.profil

• hydrodynamische Moden:

Transversalwellen: $\underline{u} = v(z,t)\, \underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\xi)\, e^{-\xi t + ikz}$

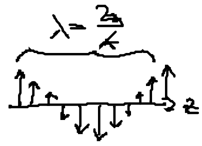
$[\underline{e}_x \perp \underline{e}_z !!]$ $\quad$ $[\text{rot}\, \underline{v} \neq 0,\ \text{div}\, \underline{v} = 0]$

in (3.78) $\left(-\xi + \frac{\eta}{\rho_0} k^2\right) v(k,\xi) = 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{\xi = \frac{\eta}{\rho_0} k^2}$ (3.86)

... Dispersionsrelation für Schermoden

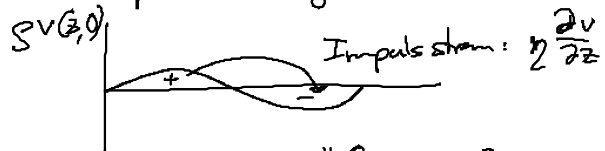
ξ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}



$\xi \longrightarrow 0$ für $k \to 0$!

„unendliche Lebensdauer" für hydrodynam. Mode für $k \to 0$

Grund: Impulserhaltung



Relaxationszeit: $\xi^{-1} = \frac{\rho_0}{\eta k^2} \underset{k = \frac{2\pi}{1\mu m}}{\overset{H_2O}{=}} 10^{-7}\, s$

b) Quellen:

div $\underline{v} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\underline{v} = v(x,t)\ \underline{e}_x$ ... Longitudinalwelle

mit $v(x,t) = v(k,\omega)\, e^{-i(\omega t - kx)}$

= Schallwelle

Geschw.: $c = \Big(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_S}_{\text{isentrope Kompressibilität}}\Big)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{m}{s}$ für Flüssigkeit

also: $1\mu m$ in $c^{-1} \cdot 1\mu m = 1ns$!

schneller als Scherwelle!

benötigt Massen-/Energiebilanz $\longrightarrow$ Kap. 3.13