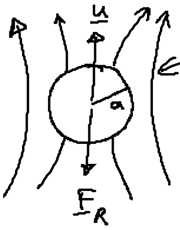
NS-Gl.:

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} + (\eta+\eta')\,\underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{v}) + \rho\,\underline{b} \quad (3.62)$$

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

- konstantes T: nur NS-Gleichung, keine Energiebilanz nötig
- Motivation:
  (1) hydrodynam. Moden der NS-Gln = Störungen um den homogenen Grundzustand
  (2) Stokes-Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a\,\underline{u}$



mit Kugel mitbewegtes statisches Geschw.profil

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

- Zerlegungssatz für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

$\boxed{\text{$\underline{v}(\underline{x},t)$ ist bestimmt durch seine Wirbel $\mathrm{rot}\,\underline{v}$, seine Quelle $\mathrm{div}\,\underline{v}$ und ein Anteil $\underline{v}_R$ mit $\mathrm{div}\,\underline{v}_R = \mathrm{rot}\,\underline{v}_R = 0$, um die Randbed. zu erfüllen}}$

a) Wirbel:

- Voraussetzung: $Re \ll 1 \longleftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}$ $\Big\}$ linearisiere in $\underline{v}$ & $\delta\rho$
  $\rho = \rho_0 + \delta\rho \approx \rho_0$

mit rot(3.62) & $\mathrm{rot}\,\underline{\nabla}\ldots = 0$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\underline{\nabla}^2\right)\mathrm{rot}\,\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{b}} \quad (3.72)$$

... Diffusionsgleichung für Wirbel/Vortizität

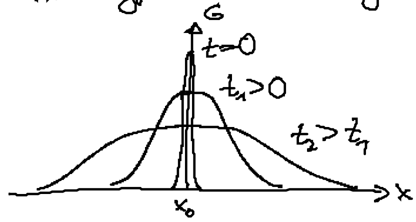
$\frac{\eta}{\rho_0}$ ... Diffusionskonstante für Wirbel

- Greensche Fkt.: $\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}$
  ... bei $t=0$ initiierter „pkt.förmiger" Wirbel

Lsg. von (3.72) $\xrightarrow{}$ o.B.

$$\boxed{\underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}} \quad (3.73)$$

... diffusive Ausbreitung des Wirbels



mit $\lim_{t\to 0} \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \hat{\underline{\nu}}\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

Normierung: $\int G(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = \hat{\underline{\nu}}, \quad t \geq 0$ (3.74)

- Folgerung:

mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels

= mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von $\underline{x}_0$

$$\boxed{\langle (\underline{x}-\underline{x}_0)^2\rangle = \int (\underline{x}-\underline{x}_0)^2\, G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = 6\,\frac{\eta}{\rho_0}\,t}$$

2× Raumdimension — Diffusionskonstante — diffusive Ausbreitung

Beweis: Übungen

hydrodynam. Zeitskala:

mit l_H ... charakt. Länge

$\longrightarrow$ $\boxed{\tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho_0}}$ (3.76)

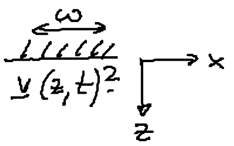
Bsp: $l_H^2 = (1\mu m)^2, \quad \eta = 10^{-3}\frac{kg}{ms}, \quad \rho_0 = 1\frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$

$\longrightarrow \tau_H = 10^{-7}\,s$!

- planare Geometrie (1):

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{b} = \delta(z-z_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}} \longleftrightarrow G(z-z_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}} \quad (3.77)$$

- planare Geometrie (2):



$\underline{v} = v(z,t)\, \underline{e}_x \qquad [\mathrm{div}\, \underline{v} = 0!]$

$\mathrm{div}\, \underline{v} = 0,\ \underline{\sigma} = 0$ in (3.62): $\quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(z,t) = 0} \quad (3.78)$

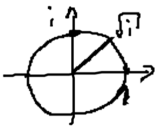
$[p = \text{konstant}]$

Ansatz: $\quad v(z,t) = v(\omega, z)\, e^{i\omega t}$ in (3.78)

$\longrightarrow \left(i\omega - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(\omega,z) = 0 \quad (3.79)$

$\longrightarrow v(\omega,z) = v(\omega,0)\, e^{-\sqrt{i\omega \frac{\rho_0}{\eta}}\, z}$

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \longrightarrow \quad \boxed{v(\omega,z) = v(\omega,0)\, e^{-(1+i)\, z/\delta}}$



exp Abfall $\qquad$ Oszillation

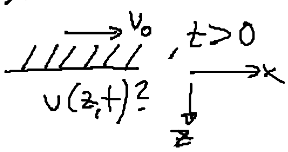
Eindringtiefe der Oszillation: $\quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega \rho_0}}} \quad (3.81)$

$\delta \to \infty,\ \omega \to 0$!!

$\delta \to 0,\ \omega \to \infty$

· planare Geometrie (3):

$\underline{v} = v(z,t)\, \underline{e}_x$



Randbed.:

(1) $v(0,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ v_0, & t>0 \end{cases}$

(2) $v(z,0) = 0, \quad z > 0$

Lsg.: Superpositionsprinzip!

$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\ 2\,\Theta(-z_0)\ G(z-z_0,t) \quad (3.82)$

Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

↳ Stufenfkt: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denn: erfüllt Randbed.:

$v(0,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\ 2\,\Theta(-z_0)\ G(-z_0,t) \overset{t>0}{=} v_0$

– Normierung von G (3.74)
– Symmetrie bzgl. $z_0 = 0$

$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\ 2\Theta(-z_0)\ \delta(z-z_0) = v_0\, 2\Theta(-z) = 0, \quad z>0$

also: $v(z,t) \overset{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty} \underbrace{G(z-z_0,t)}_{= \frac{1}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0\, t}}} dz_0$

$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}} \longrightarrow$

$du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}$

$$\boxed{v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}^{\infty} e^{-u^2}\, du} \quad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}$: $\quad v(z,t) \approx 0$

(2) $z \ll \sqrt{\ \text{"}\ }$: $\quad v(z,t) = v_0$

$\longrightarrow$ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\eta/\rho_0} \mathrel{\hat{=}} \tau_H$!!

$\longrightarrow$ $\tau > \tau_H$ ... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.profil

• hydrodynamische Moden:

Transversalwellen: $\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\xi)\, e^{-\xi t + ikz}$

[$\underline{e}_x \perp \underline{e}_z$!!]

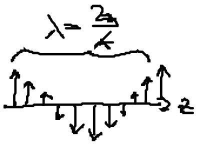
[rot $\underline{v} \neq 0$
div $\underline{v} = 0$]

in (3.78) $\left(-\xi + \frac{\eta}{\rho_0}k^2\right) v(k,\xi) = 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{\xi = \frac{\eta}{\rho_0}k^2}$ (3.86)

... Dispersionsrelation für Schermode

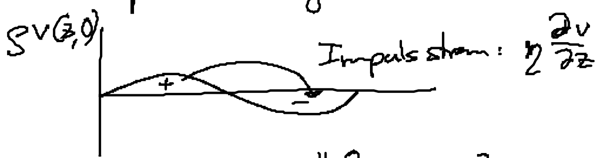
ξ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}



$\xi \longrightarrow 0$ für $k \to 0$!

„unendliche Lebensdauer" für hydrodynam. Mode für $k \to 0$

Grund: Impulserhaltung



Relaxationszeit: $\xi^{-1} = \frac{\rho_0}{\eta k^2} \underset{k=\frac{2\pi}{1\mu m}}{\overset{H_2O}{=}} 10^{-7}$ s

b) <u>Quellen</u>:

$\mathrm{div}\,\underline{v} \neq 0 \longrightarrow \underline{v} = v(x,t)\,\underline{e}_x$ ... Longitudinalwelle

mit $v(x,t) = v(k,\omega)\, e^{-i(\omega t - kx)}$

= Schallwelle

Geschw.: $c = \Big(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{\text{isentrope Kompressibilität}}\Big|_S\Big)^{-1/2} \approx 10^3 \,\frac{m}{s}$ für Flüssigkeit

also: $1\mu m$ in $c^{-1}\cdot 1\mu m = 1 ns$!

schneller als Scherwelle!

benötigt Massen-/Energiebilanz $\longrightarrow$ Kap. 3.13