3.6 Energiebilanz

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\, u\right) = \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right) - \mathrm{div}\, \underline{q} + \rho\, r_w \qquad (3.34)$$

3.7 Entropiebilanz:

$$T\sigma = -\rho\left(\frac{df}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) + \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right) - \frac{1}{T}\,\underline{q}\cdot\underline{\nabla} T \geq 0 \qquad (3.38)$$

3.8 Newtonsche Flüssigkeit

- spezifische freie Energie: $f = f(T,\rho)$

$$\longrightarrow \quad p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}, \qquad s = -\frac{\partial f}{\partial T} \qquad (3.39)$$

Spannungstensor:
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}^0 + \underline{\underline{T}}' \\ &= -p\,\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{T}}'\end{aligned}} \qquad (3.41)$$

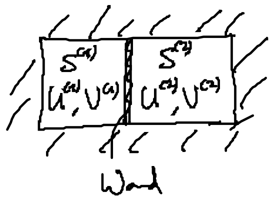
$\longrightarrow$ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit

$$\boxed{T\sigma = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}} - \frac{1}{T}\,\underline{q}\cdot\underline{\nabla} T \geq 0} \qquad (3.43)$$

- Deutung:

$$(3.43) \longrightarrow \sigma = \mathrm{Sp}\,\frac{\underline{\underline{T}}'}{T}\underline{\underline{A}} + \underline{q}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{T} \geq 0$$

(i) Vgl. mit Thermodynamik



Gesamtentropie: $S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)})$

Wärme durchlässig, bewegliche Wand

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}}\right)}_{\hat{=}\,\text{Temp. gradient}} \underbrace{\frac{\Delta U^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=}\, q} + \underbrace{\left(\frac{p^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{T^{(2)}}\right)}_{\hat{=}\, \frac{\underline{\underline{I}}'}{T}} \underbrace{\frac{\Delta V^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=}\,\underline{\underline{A}}} \geq 0$$

$\Delta U^{(1)} + \Delta U^{(2)} = 0$

$\Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)} = 0$

(ii) Deutung durch Hydrodynamik:

$\underline{\underline{I}}'$, q	Fluß / Stromdichte von Erhaltungsgrößen $\left\{ \underline{g}^{V}, e \right.$
$\underline{\underline{A}}/T$, $\underline{\nabla}\frac{1}{T}$	generalisierte Kraft = Gradienten der zur Erhaltungsgröße $\left\{ \underline{g}^{V}, e \right\}$ konjugierten thermodyn. Variablen $\left\{ \frac{\underline{v}}{T}, \frac{1}{T} \right.$

b) Theorie der irreversiblen Thermodynamik

- nahe thermodynamischen Gleichgewichts:

Flüsse = lineare Funktionen der Kräfte

$$\boxed{\begin{pmatrix} q \\ \underline{\underline{I}}' \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \underline{\nabla}\frac{1}{T} \\ \underline{\underline{A}}/T \end{pmatrix}} \qquad (3.45)$$

$\mathcal{L}$ ... Matrix der Transportkoeffizienten

(i) Onsagersche Reziprozitätsrelation: Nobelpreis Chemie 1968

$$\boxed{\mathcal{L}(\underline{B}) = \mathcal{L}^{t}(-\underline{B}) \quad \text{bzw} \quad \mathcal{L}_{ij}(\underline{B}) = \mathcal{L}_{ji}(-\underline{B})} \qquad (3.46)$$

[$\underline{B}$ ... Magnetfeld]

Grund: Zeitumkehrinvarianz der mikroskopischen Bewegungsgleichungen

(ii) $\boxed{\mathcal{L} \text{ muß unter Symmetrieoperationen des Systems invariant sein.}}$ (3.47)

Bsp: isotrope Flüssigkeit invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\longrightarrow$ $\mathcal{L}$ invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

- Verhalten unter Zeitumkehr:

Bsp. $\rho \underline{v} = \rho \frac{dx}{dt} \longrightarrow -\rho \underline{v}$ für $t \to -t$

Impulsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}\left[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{T}}'(\underline{\underline{A}})\right] = \rho \underline{b}$$

Zeitumkehr: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}\left[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}} \underbrace{- \underline{\underline{T}}'(-\underline{\underline{A}})}_{+\underline{\underline{T}}'(\underline{\underline{A}})}\right] = \rho \underline{b}$, $\underline{\underline{T}}' \sim \underline{\underline{A}}$

<u>keine</u> Zeitumkehrinvarianz $\hat{=}$ Irreversibilität
$\hat{=}$ Dissipation

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{dissipative Ströme verhalten sich unter Zeitumkehr wie die dazugehörigen Erhaltungsgrößen}}$ (3.48)

<u>Bsp.</u> $\underline{\underline{T}}' \longleftrightarrow \rho \underline{v}$

c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit

- Zeitumkehr:

$\rho \underline{v} \to -\rho \underline{v} \overset{(3.48)}{\Longrightarrow} \underline{\underline{T}}' \longrightarrow -\underline{\underline{T}}'$ für $t \to -t$

$\rho e \to \rho e \Longrightarrow \underline{q} \longrightarrow \underline{q}$

wegen: $\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{A}} \longrightarrow -\underline{\underline{A}} \\ \underline{\nabla} T \longrightarrow \underline{\nabla} T \end{array}\right\}$ für $t \to -t$

folgt aus (3.45) $\boxed{\begin{array}{l} T'_{ij} = \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i = -\varkappa_{ij} \nabla_j T \end{array}}$ (3.49)

[keine Kopplung $T'_{ij} \sim \underline{\nabla} T$
$q_i \sim A_{ij}$]

NB: T wurde in $\underline{\underline{\eta}}, \underline{\underline{\varkappa}}$ gesteckt

(i) <u>Wärmeleitfähigkeitstensor $\underline{\underline{\varkappa}}$</u>:

Symmetrieforderung: $\varkappa_{ij} = \varkappa_{kl} R_{ki} R_{lj}$ $\quad \underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{\varkappa}} = \varkappa \underline{\underline{1}} \\ \underline{q} = -\varkappa \underline{\nabla} T \end{array}}$ (3.50)

$\varkappa$ ... Wärmeleitfähigkeit

NB: $\boxed{\kappa \geq 0}$ (3.51)

wegen $\sigma = -\frac{1}{T^2}\underline{q}\cdot\underline{\nabla}T = \frac{\kappa}{T^2}(\underline{\nabla}T)^2 \geq 0$

[„Wärme fließt von hoher zu niederer Temp."]

(ii) <u>Zähigkeitstensor</u>: η_{ijkl} (4. Stufe) [81 Komp.]

(1) Permutationssymmetrie:

(3.52) $\begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} & \text{wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \;\&\; A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases}$

wegen Dissipationsfunktion $\boxed{\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}} \\ &= \frac{1}{2}\eta_{ijkl}A_{kl}A_{ij} \end{aligned}}$ (3.53)

$2w$ ... pro Zeit- und Volumeinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{\underline{T}}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{A}}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationssymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} R_{ll'} \quad , \quad \underline{\underline{R}} \in SO(3)$$

(1) & (2) $\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$\underline{T'_{ij} = \eta_{ijkl}A_{kl}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= \eta'\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ \underline{\underline{T}}' &= 2\eta\underline{\underline{A}} + \eta'\underline{\underline{1}}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} \end{aligned}} \quad (3.56)$$

... $\underline{\underline{T}}'$ für Newtonsche Flüssigkeit

• Umschreibung:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}' = 2\eta\underbrace{\left(\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right)}_{\text{Scherung}} + \left(\eta' + \frac{2}{3}\eta\right)\underbrace{\underline{\underline{1}}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}} \\ &\eta \text{ ... Scherviskosität} \qquad \eta' + \frac{2}{3}\eta \text{ ... Volumenviskosität} \end{aligned}} \quad (3.57)$$

Wähle: reine Scherung $(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 0)$ und $T\dot{\sigma} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} \geq 0$

$\left[\frac{\dot{V}}{V} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right]$ reine Kompression $(\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{1}})$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0}$$

$$\Big[\text{Beweis: } T\dot{\sigma} = \ldots = 2\eta\, \mathrm{Sp}\left[\left(\underline{\underline{A}} - \tfrac{1}{3}\underline{\underline{1}}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right)^2\right] + \left(\eta' + \tfrac{2}{3}\eta\right)\left(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right)^2 \geq 0 \Big]$$