3.6 Energiebilanz

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} u\right) = \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right) - \mathrm{div}\, \underline{q} + \rho\, r_w \qquad (3.34)$$

3.7 Entropiebilanz: $T\sigma = -\rho\left(\frac{df}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) + \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{T}}^t\underline{\underline{L}}\right) - \frac{1}{T}\underline{q}\cdot\underline{\nabla}T \geq 0$ (3.38)

3.8 Newtonsche Flüssigkeit

- spezifische freie Energie: $f = f(T, \rho)$

$$\longrightarrow \quad p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}, \qquad s = -\frac{\partial f}{\partial T} \qquad (3.39)$$

Spannungstensor: $\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}^0 + \underline{\underline{T}}' \\ &= -p\,\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{T}}'\end{aligned}}$ (3.41)

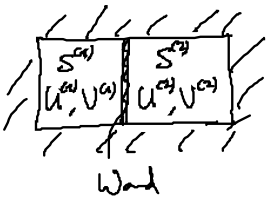
→ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit

$$\boxed{T\sigma = \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}} - \frac{1}{T}\underline{q}\cdot\underline{\nabla}T \geq 0} \qquad (3.43)$$

- Deutung:

$$(3.43) \longrightarrow \quad \sigma = \mathrm{Sp}\, \frac{\underline{\underline{T}}'}{T}\underline{\underline{A}} + \underline{q}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{T} \geq 0$$

(i) Vgl. mit Thermodynamik



Gesamtentropie: $S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)})$

Wärme durchlässig, bewegliche Wand

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}}\right)}_{\hat{=}\text{ Temp. gradient}} \underbrace{\frac{\Delta U^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=}\, q} + \underbrace{\left(\frac{p^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{p^{(2)}}{T^{(2)}}\right)}_{\hat{=}\, \frac{\underline{\underline{I}}'}{T}} \underbrace{\frac{\Delta V^{(1)}}{\Delta t}}_{\hat{=}\, \underline{\underline{A}}} \geq 0$$

$\Delta U^{(1)} + \Delta U^{(2)} = 0$

$\Delta V^{(1)} + \Delta V^{(2)} = 0$

(ii) Deutung durch Hydrodynamik:

$\left.\begin{matrix} \underline{\underline{I}}' \\ q \end{matrix}\right\}$ Fluß Stromdichte von Erhaltungsgrößen $\left\{\begin{matrix} g^v \\ e \end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix} \underline{\underline{A}}/T \\ \nabla \frac{1}{T} \end{matrix}\right\}$ generalisierte Kraft = Gradienten der zur Erhaltungsgröße $\left\{\begin{matrix} g^v \\ e \end{matrix}\right\}$ konjugierte thermodyn. Variable $\left\{\begin{matrix} \frac{\underline{v}}{T} \\ \frac{1}{T} \end{matrix}\right.$

b) Theorie der irreversiblen Thermodynamik

- nahe thermodynamischem Gleichgewicht:

Flüsse = lineare Funktionen der Kräfte

$$\boxed{\begin{pmatrix} q \\ \underline{\underline{I}}' \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \nabla \frac{1}{T} \\ \underline{\underline{A}}/T \end{pmatrix}} \qquad (3.45)$$

$\mathcal{L}$ ... Matrix der Transportkoeffizienten

(i) Onsagersche Reziprozitätsrelation: Nobelpreis Chemie 1968

$$\boxed{\mathcal{L}(\underline{B}) = \mathcal{L}^t(-\underline{B}) \quad \text{bzw} \quad \mathcal{L}_{ij}(\underline{B}) = \mathcal{L}_{ji}(-\underline{B})} \qquad (3.46)$$

[$\underline{B}$ ... Magnetfeld]

Grund: Zeitumkehrinvarianz der mikroskopischen Bewegungsgleichungen

(ii) $\boxed{\mathcal{L} \text{ muß unter Symmetrieoperationen des Systems invariant sein.}}$ (3.47)

Bsp: isotrope Flüssigkeit invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$\longrightarrow \mathcal{L}$ invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

• Verhalten unter Zeitumkehr:

Bsp. $\rho \underline{v} = \rho \frac{dx}{dt} \longrightarrow -\rho \underline{v}$ für $t \to -t$

Impulsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{T}}'(\underline{\underline{A}})] = \rho \underline{b}$$

Zeitumkehr: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}} \underbrace{- \underline{\underline{T}}'(-\underline{\underline{A}})}_{+\underline{\underline{T}}'(\underline{\underline{A}})}] = \rho \underline{b}$, $\underline{\underline{T}}' \sim \underline{\underline{A}}$

keine Zeitumkehrinvarianz $\hat{=}$ Irreversibilität

$\hat{=}$ Dissipation

$$\longrightarrow \boxed{\text{dissipative Ströme verhalten sich unter Zeitumkehr wie die dazugehörigen Erhaltungsgrößen}} \quad (3.48)$$

Bsp: $\underline{\underline{T}}' \longleftrightarrow \rho \underline{v}$

c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit

• Zeitumkehr:

$\rho \underline{v} \to -\rho \underline{v} \overset{(3.48)}{\Longrightarrow} \underline{\underline{T}}' \to -\underline{\underline{T}}'$ für $t \to -t$

$\rho e \to \rho e \Longrightarrow \underline{q} \longrightarrow \underline{q}$

wegen: $\left.\begin{array}{l}\underline{\underline{A}} \longrightarrow -\underline{\underline{A}} \\ \underline{\nabla} T \longrightarrow \underline{\nabla} T\end{array}\right\}$ für $t \to -t$

folgt aus (3.45)

$$\boxed{\begin{aligned} T'_{ij} &= \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i &= -\kappa_{ij} \nabla_j T \end{aligned}} \quad (3.49)$$

[keine Kopplung $T'_{ij} \sim \nabla T$
$q_i \sim A_{ij}$]

NB: T wurde in $\underline{\underline{\eta}}, \underline{\underline{\kappa}}$ gesteckt

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor $\underline{\underline{\kappa}}$:

Symmetrieforderung: $\kappa_{ij} = \kappa_{kl} R_{ki} R_{lj}$ $\quad \underline{\underline{R}} \in SO(3)$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\kappa}} &= \kappa \underline{\underline{1}} \\ \underline{q} &= -\kappa \underline{\nabla} T \end{aligned}} \quad (3.50)$$

κ ... Wärmeleitfähigkeit

NB: $\boxed{\kappa \geq 0}$ (3.51)

wegen $\sigma = -\frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \underline{\nabla} T = \frac{\kappa}{T^2} (\underline{\nabla} T)^2 \geq 0$

[„Wärme fließt von hoher zu niederer Temp."]

(ii) <u>Zähigkeitstensor:</u> η_{ijkl} (4. Stufe) [8.1 Kapo]

(1) Permutationssymmetrie:

$$(3.52)\quad \begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} & \text{wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \ \& \ A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} & \end{cases}$$

wegen Dissipationsfunktion $\boxed{\begin{aligned} w &= \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}} \\ &= \tfrac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{kl} A_{ij} \end{aligned}}$ (3.53)

$2w$ ... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{\underline{T}}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{A}}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationssymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} R_{ll'} \quad , \quad \underline{\underline{R}} \in SO(3)$$

$(1) \ \& \ (2) \xrightarrow{\text{o.B.}}$

$T'_{ij} = \eta_{ijkl} A_{kl}$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= \eta' \, \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \\ \underline{\underline{T}}' &= 2\eta \underline{\underline{A}} \quad + \eta' \underline{\underline{1}} \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}} \end{aligned}} \quad (3.56)$$

... $\underline{\underline{T}}'$ für Newtonsche Flüssigkeit

• Umschreibung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}}' &= 2\eta \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} - \tfrac{1}{3} \underline{\underline{1}} \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}} \right)}_{\text{Scherung}} + \left(\eta' + \tfrac{2}{3} \eta \right) \underbrace{\underline{\underline{1}} \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}} \\ &\eta \text{ ... Scherviskosität} \qquad \eta' + \tfrac{2}{3}\eta \text{ ... Volumenviskosität} \end{aligned}} \quad (3.57)$$

Wähle: reine Scherung $(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = 0)$
$\left[\frac{\dot{V}}{V} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right]$ reine Kompression $(\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{1}})$ $\Big\}$ und $T\dot{\sigma} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\Pi}}\,\underline{\underline{A}} \geq 0$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0}$$

$$\left[\text{Beweis: } T\dot{\sigma} = \ldots = 2\eta\,\mathrm{Sp}\left[\left(\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\,\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right)^2\right] + \left(\eta' + \frac{2}{3}\eta\right)\left(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}\right)^2 \right\} \geq 0$$