

3.3 Massenbilanz

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0} \quad (3.15a)$$

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}} \quad \dots \text{Massenstromdichte} \quad (3.15b)$$

• Hilfsformel:

Geg: $\text{physikal. Gr\o{o}\ss e} = \int \rho \phi \, d^3x = \int \phi \, \underbrace{dm}_{\text{Masse}} \text{d}t$

Felder:

$\rho \phi$... Volumendichte = Gr\o{o}\ss e pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Gr\o{o}\ss e = " * Masseneinheit

dann gilt: $\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \phi \mathbf{v}) = \rho \frac{d\phi}{dt} \quad (3.17)$

$$\text{Beweis: } \underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \underbrace{\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi}_{= \rho \frac{d\phi}{dt}} + \underbrace{\phi \operatorname{div} (\rho \mathbf{v})}_{= 0} = 0, \quad (3.15)$$

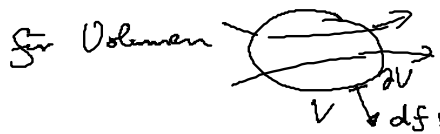
Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) Thermodynam. Pot. hales:

spezifische innere Energie u
+ Entropie s

(iii) Impulsdichte: $\rho \mathbf{v} \rightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 34)

3.4 Impulsbilanz



• Gesamtimpuls:
$$\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{g(x,t)}_{\text{Impulsdichte}} \underbrace{v(x,t)}_{\text{Geschw. von Vol. el. } d^3x} d^3x \quad (3.18)$$

• Newton (2. Axiom)

$$\frac{dP}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (g v) d^3x = - \int_V \underbrace{\dot{J}^{(P)}}_{\substack{\text{Impulsstrom} \\ \text{[konvektiver} \\ \text{Anteil]}}} dF + \int_V \underbrace{g b}_{\substack{\text{Volumen-} \\ \text{kräfte}}} d^3x + \int_{\partial V} \underbrace{t(x, n, t)}_{\text{Oberflächenkräfte}} dF \quad (3.19)$$

a) Impulsstromdichte (konvektiver Anteil):

• $\dot{J}^{(P)}$... Tensor 2. Stufe!

$$(3.15b) \rightarrow \boxed{\dot{J}_{ij}^{(P)} = g v_i v_j} \quad (3.19a)$$

Impuls
dichte \times Geschw.

$$\boxed{\dot{J}^{(P)} = g v \otimes v}$$

b) Volumenkräfte:

$g b$... Volumenkraftdichte

b ... Massekraftdichte [Kraft pro Masse!]

• Bsp: externe Felder Gravitation: $b = g$
[greife lokal elektr./magn. Felder
 d^3x an!]

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor

• Urspr.: kurzreichweitige WW

Bsp:



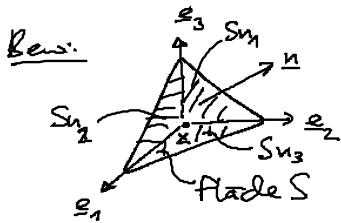
- Druckkräfte
- Reibzwische Flüssigkeitsdichte

gefällige Tropfen

• Beh.:
$$\underline{t}(x, n) = \underline{I}(x) n \quad (3.19b)$$

$$t_i = T_{ij} n_j$$

\underline{I} - Spannungstensor



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$
 Höhe \uparrow Grundfläche \uparrow

Impulsbilanz für $S, h \rightarrow 0$ $\left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \text{div } \underline{t} \stackrel{(p)}{=} \rho \frac{dv}{dt} \right]$

$$S \left[\underline{t}(x, n) + \left(\sum_{i=1}^3 \right) n_i \underline{t}(x, -e_i) \right] + \frac{1}{3} h S \rho \left(b - \frac{dv}{dt} \right) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\dots) \rightarrow \underline{t}(x, n) = - \underline{t}(x, -e_i) n_i$$

 also = reaction = $\underline{t}(x, e_i) n_i$

bzw. in Komp.
$$t_i(x, n) = \underbrace{T_{ij}}_{\rightarrow (3.19b)} n_j$$

• damit:
$$\int \underline{t}(x, n) df = \int \underline{I} n df = \int \underbrace{\underline{I}}_{T_{ij} df} df \stackrel{\text{Gib}}{=} \int \underbrace{\text{div } \underline{I}}_{T_{ij}} d^3x \quad (3.20)$$

Ein selb.:

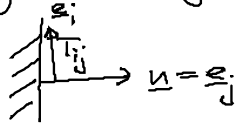
• Verdantlichg:
$$T_{ij} = e_i \cdot \underline{I} e_j$$

... i-te Komponente des Spangvektors $\underline{t} = \underline{I} n$ für Normale $n = e_j$

(1) Normalspanne: $i=j$

Diagonalelemente: Spangsträfte $\parallel n = e_j$

(2) Schubspanne: $i \neq j$



Nichtdiagonale: Spangskräfte $\perp u = e_j$

(3) \underline{I} symmetrisch (s.u.) \rightarrow Diagonalisierung

$$\underline{I} \frac{y^{(i)}}{z^{(i)}} = \lambda^{(i)} \frac{y^{(i)}}{z^{(i)}}$$

$$\left[\rightarrow \underline{I} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \right]$$

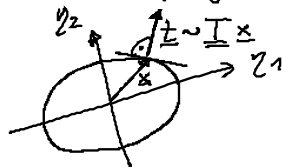
Hauptspannenrichtung $\parallel z^{(i)}$

NB: keine Schubspanne $\perp z^{(i)}$

• Poinsotsche Konstruktion:

$$\underline{x} \cdot \underline{I} \underline{x} = \text{konst.}$$

... Spangfläche = Bilinearform



$\underline{z} \perp$ Tangentialebene an Spangfläche

Beweis: Übung

d) Impulsbilanz:

• Newton (3.19), $\int \underline{f}^{(P)} d\underline{f} = \int \underbrace{\text{div } \underline{f}}_{\underline{g} \otimes \underline{v}}^{(P)} d\underline{x}$, (3.20) & \underline{v} beliebig

kanonische Form:

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\underline{g} \underline{v}) + \text{div} (\underline{g} \underline{v} \otimes \underline{v} - \underline{I}) = \underline{g} \underline{b} \quad (3.21)$$

Impulstromdichte! Quellterm

NB: Kontinuitätsgleichung für g^v & Quellen!

• Umschreibung

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial t} (S \rho_i) + \nabla_j (S v_i v_j) \stackrel{(3.17)}{=} S \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v \cdot \nabla v_i \right) = S \frac{d}{dt} v_i$$

ϕ in (3.17)

folgt aus (3.21):

$$\boxed{S \frac{dv}{dt} = S \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \text{div } \underline{\underline{I}} + S \underline{\underline{b}}} \quad (3.22)$$

3.5 Einclub: Symmetrie des Spannungstensors

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik