3.3 Massenbilanz

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0} \quad (3.15a)$$

$$\boxed{\underline{j} = \rho \underline{v}} \ \ldots \text{ Massenstromdichte} \quad (3.15b)$$

- Hilfsformel:

Geg: physikal. Größe $= \int \rho \phi \, d^3x = \int \phi \underbrace{dm}_{\text{Masseneinheit}}$

Felder:
$\rho\phi$ ... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit
ϕ ... spezifische Größe = " " Masseneinheit

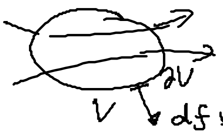
dann gilt: $$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \phi \underline{v}) = \rho \frac{d\phi}{dt} \quad (3.17)$$

Beweis: $$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \phi + \phi \operatorname{div}(\rho \underline{v})$$
$$= \rho \frac{d\phi}{dt} \qquad = 0, \ (3.15)$$

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$
(ii) thermodynam. Potentiale:
spezifische innere Energie u
" Entropie s
(iii) Impulsdichte: $\rho \underline{v} \longrightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4 Impulsbilanz

für Volumen



• Gesamtimpuls: $\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{\rho(\underline{x},t)\,\underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)}_{\text{Geschw. von Vol.-element } d^3x}}_{\text{Impulsdichte}}\, d^3x$ (3.18)

• Newton (2. Axiom) (3.19)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, d^3x = \underbrace{-\int_{\partial V} \underline{\underline{j}}^{(p)}\, d\underline{f}}_{\substack{\text{Impulsstrom}\\ \text{[konvektiver}\\ \text{Anteil]}}} + \underbrace{\int_V \rho\, \underline{b}\, d^3x}_{\substack{\text{Volumen-}\\ \text{kräfte}}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n},t)\, df}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

a) Impulsstromdichte (konvektiver Anteil):

• $\underline{\underline{j}}^{(p)}$ .... Tensor 2. Stufe!

$$(3.15b) \longrightarrow \boxed{j_{ij}^{(p)} = \underbrace{\rho v_i}_{\text{Impulsdichte}} v_j} \quad (3.19a)$$

Impulsdichte × Geschw.

$$\boxed{\underline{\underline{j}}^{(p)} = \rho\, \underline{v} \otimes \underline{v}}$$

b) Volumenkräfte:

$\rho \underline{b}$ ... Volumenkraftdichte

$\underline{b}$ ... Massenkraftdichte [Kraft pro Masse!]

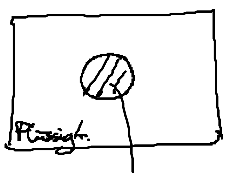
• Bsp: externe Felder [greifen lokal an d^3x an!] Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$

elektr. / magn. Felder

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor

• Ursprung: kurzreichweitige Ww

Bsp:



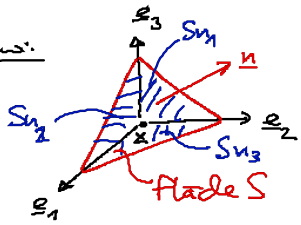
– Druckkräfte
– Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

gefärbte Tropfen

- **Beh.:** $$\boxed{\begin{aligned}\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) &= \underline{\underline{T}}(\underline{x})\,\underline{n}\\ t_i &= T_{ij}\,n_j\end{aligned}} \quad (3.19b)$$

$\underline{\underline{T}}$ - Spannungstensor

Bew.:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h\, S$

Höhe, Grundfläche

Impulsbilanz für $S, h \to 0$ $\quad \left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}_{\underline{f}}{}^{(p)} \overset{(3.17)}{=} \rho \frac{d\underline{v}}{dt}\right]$

$$S\Big[\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) + \Big(\sum_{i=1}^{3}\Big) n_i\, \underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\Big] + \frac{1}{3} h S \rho \Big(\underline{b} - \frac{d\underline{v}}{dt}\Big) = 0$$

$$\lim_{h\to 0}(\ldots) \longrightarrow \quad \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) = -\,\underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\, n_i \underset{=\text{reaction}}{\overset{\text{actio}}{=}} \underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i)\, n_i$$

bzw. in Komp. $\quad t_i(\underline{x},\underline{n}) = \underbrace{t_i(\underline{x},\underline{e}_j)}_{T_{ij}}\, n_j \quad T_{ij} \longrightarrow (3.19b)$

- **damit:** $$\int \underline{t}(\underline{x},\underline{n})\, df = \int \underline{\underline{T}}\,\underline{n}\, df = \int \underbrace{\underline{\underline{T}}\, d\underline{f}}_{T_{ij}\, df_j} \overset{\text{Gauß}}{=} \int \underbrace{\operatorname{div}\underline{\underline{T}}}_{T_{ij,j}}\, d^3x \quad (3.20)$$

Einschub:

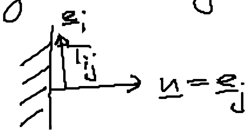
- Verdeutlichung: $$\boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j}$$

... i-te Komponente des Spannungsvektors $\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}$ für Normale $\underline{n} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannungen: $i = j$

Diagonalelemente: Spannungskräfte $\parallel \underline{n} = \underline{e}_j$

(2) Schubspannungen: $i \neq j$



Nichtdiagonalelemente: Spannungskräfte $\perp$ $\underline{n} = \underline{e}_j$

(3) $\underline{\underline{T}}$ symmetrisch (s.u.) $\longrightarrow$ Diagonalisierung

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{\eta}^{(i)} = \lambda^{(i)}\,\underline{\eta}^{(i)}} \qquad \left[\longrightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix}\lambda^{(1)} & & 0\\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)}\end{pmatrix}\right]$$

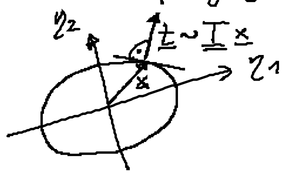
Hauptspannungsrichtung   Hauptspannung $\parallel \underline{\eta}^{(i)}$

NB: keine Schubspannungen $\perp \underline{\eta}^{(i)}$

· Poinsotsche Konstruktion:

$$\boxed{\underline{x}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \text{konst.}}$$

... Spannungsfläche = Bilinearform



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spannungsfläche

Beweis: Übung

d) Impulsbilanz:

· Newton (3.19), $\int \underline{\underline{j}}^{(p)} d\underline{f} = \int \mathrm{div}\, \underbrace{\underline{\underline{j}}^{(p)}}_{\rho\underline{v}\circ\underline{v}} d^3x$, (3.20) & V beliebig

Kanonische Form:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}) + \mathrm{div}\,(\underbrace{\rho\underline{v}\circ\underline{v} - \underline{\underline{T}}}_{\text{Impulsstromdichte!}}) = \underbrace{\rho\,\underline{b}}_{\text{Quellterm}}} \qquad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für $\rho \underline{v}$ & Quellterm!

- Umschreibung

mit $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) \overset{(3.17)}{=} \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\, v_i\right) = \rho \frac{d}{dt} v_i$

ϕ in (3.17)

folgt aus (3.21):

$$\boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = \operatorname{div}\underline{\underline{T}} + \rho\,\underline{b}} \quad (3.22)$$

3.5 Einschub: Symmetrie des Spannungstensors

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik