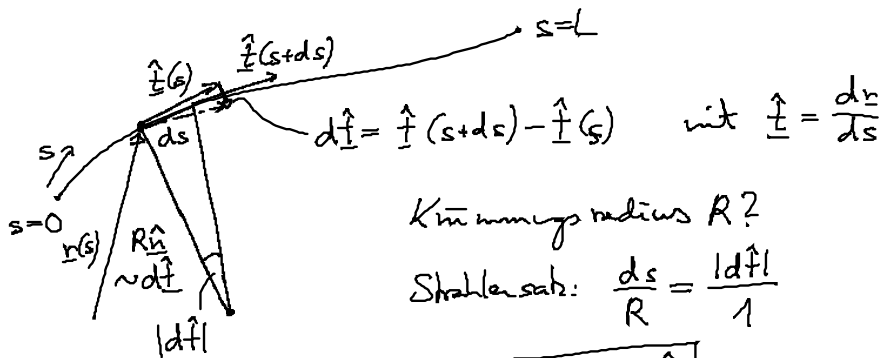


7.2 Elastohydrodynamik dünner Stäbe

- Grundlagen: Elastizitätstheorie + hydrodynamische Reibung dünner Stäbe
- Anwendung:
 - superparamagnetisches Filament
 - semi-flexible (Bio) Polymere
 - Aktin (Zellgerüst)
 - Mikrotubuli (Transportwege in Zelle)
 - DNS (Erbsubstanz)
 - ⋮

a) Kinematik

- Differentialgeometrie einer Raumkurve
 - $\vec{r}(s)$ Ortsvektor
 - Bogenlänge



Krümmungsradius R ?

Strahlensatz: $\frac{ds}{R} = \frac{|d\hat{t}|}{1}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|}$$

... Krümmung

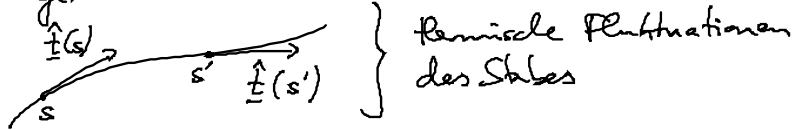
b) Elastizitätstheorie

- Biegeenergie: harmonische Näherung

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{R^2} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d\hat{t}}{ds} \right)^2 ds \quad \text{mit } \hat{t} = \frac{dr(s)}{ds}, |\hat{t}| = 1!
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

$\frac{1}{2} T l_p$... Biegekonstante = $\frac{1}{2} T \times$ Persistenzlänge

• Persistenzlänge:



→ Tangenzkorrelationen im thermodynam. GG

$$\langle \underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s') \rangle = e^{-|s-s'|/l_p} \quad (7.2)$$

Beweis: s. Übung, im kanon. Ensemble

Deutg: (i) $|s-s'| \ll l_p \rightarrow \langle \underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s') \rangle \approx 1$

Filament ist gerade

(ii) $|s-s'| \gg l_p \rightarrow \langle \dots \rangle \approx 0$

Filament ist beliebig gebogen

→ Auf Persistenzlänge l_p behält Filament seine Richtung bei

(iii) also: $L \dots$ Gesamtlänge

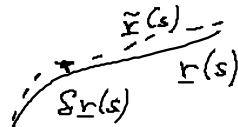
$L \gg l_p \dots$ flexibles Filament

$L \approx l_p \dots$ semiflexibles "

$L \ll l_p \dots$ starres "

• Führe ein: Biegekräft

über Variation der Biegeenergie SF für Variation der Filamentkonfiguration: $Sr(s) = \hat{r}(s) - r(s)$ mit $\frac{|Sr|}{|r|} \ll 1$



$$SF = \int_0^L \frac{\delta F}{\delta r(s)} \cdot Sr(s) ds + \text{Oberflächenenergie}$$

- $\frac{\delta F}{\delta r(s)}$... Biege kraft pro Längeneinheit
 = - Funktionalableitung von F

$$[F = \frac{1}{2} k_B T l_p \int_0^L \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 ds]$$

Bestimmung:

$$\begin{aligned} \delta F &= k_B T l_p \int_0^L \frac{dr}{ds} \cdot \delta \frac{dr}{ds} ds \\ &= \delta \frac{dr^2}{ds^2} = \delta \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(s+\varepsilon) + r(s-\varepsilon) - 2r(s)}{\varepsilon^2} \right) \end{aligned}$$

Taylorrechen.

$$r(s \pm \varepsilon) = r(s) \pm \frac{dr}{ds} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} \varepsilon^2$$

$$= k_B T l_p \int_0^L \frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \left(\frac{d^2}{ds^2} \delta r \right) ds$$

Produktregel: $\frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \delta r \right) - \frac{d^3 r}{ds^3} \cdot \frac{d}{ds} \delta r$

$$= - k_B T l_p \int_0^L \frac{d^3 r}{ds^3} \cdot \left(\frac{d}{ds} \delta r \right) ds + k_B T l_p \left. \frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \delta r \right|_0^L$$

Produktregel = $k_B T l_p \int_0^L \frac{d^4 r}{ds^4} \cdot \delta r ds + k_B T l_p \left[\frac{d^2 r}{ds^2} \cdot \left(\frac{d}{ds} \delta r \right) - \frac{d^3 r}{ds^3} \cdot \delta r \right] \Big|_0^L$ (7.5)

Oberfläche keine (s.u.)

$$\rightarrow \boxed{\frac{\delta F}{\delta r(s)} = k_B T l_p \frac{d^4 r}{ds^4}} \quad (7.6)$$

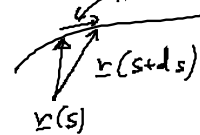
• ^{ein} freie Spannkraft:

Dynamik: $r(s, t=0) \rightarrow r(s, t)$

↑
indiziert
Metrisch

Undehnbarkeit: $L = \text{const.}$

$$\rightarrow \left| \frac{dr}{ds} \right| = 1 \quad |dr| = ds!$$



→ Variation (von F) mit Nebenbedingung!

$$\boxed{F + F_s = F + \frac{1}{2} \int_0^L \lambda(s) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 ds} \quad (7.7)$$

○ Lagrange-
parameter

Defn: F_S ... Dehnungsenergie

$$\boxed{\mathcal{I}(s) = \lambda(s) \frac{dr}{ds}} \quad (7.8) \quad \dots \text{Spannung um } \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1 \text{ zu erfüllen}$$

Variation:

$$\delta F_S = \int \lambda(s) \frac{dr}{ds} \left(\delta \frac{dr}{ds} \right)$$

$$\text{Produktregel} \quad - \int \frac{d}{ds} \left(\lambda(s) \frac{dr}{ds} \right) \delta r \, ds + \lambda(s) \frac{dr}{ds} \delta r \Big|_0^L$$

$\mathcal{I}(s)$ Oberflächenintegral (s.u.)

$$\rightarrow \boxed{- \frac{\delta F_S}{\delta r} = \frac{d}{ds} \mathcal{I}(s)} \quad (7.10)$$

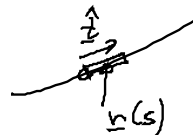
... Spannungskraft (pro Längeneinheit)

c) Elastohydrodynamik

• Näherung:

überdämpfte Bewegung } lokale Reibungskraft
(keine Trägheit) } = Biege- + Spannungskraft
"resistive force term" } auf Filament

→ Bewegung für elast. Filament:



$$\boxed{\left[\int_{\parallel} \hat{t} \otimes \hat{t} + \int_{\perp} (1 - \hat{t} \otimes \hat{t}) \right] \frac{dr}{dt} = - \frac{\delta F}{\delta r(s)} + \frac{d}{ds} \mathcal{I}(s)} \quad (7.11)$$

$$= - \frac{1}{2} T l_p \frac{d^4 r}{ds^4} + \frac{d}{ds} \left(\lambda(s) \frac{dr}{ds} \right)$$

mit $\int_{\parallel}, \int_{\perp}$... Reibkoeff. pro Längeneinheit
 \parallel, \perp Filamentsegment [s. Kap. 4.6]

NB: (7.11) ist hochgradig nicht linear!

• freie Randbedingungen: $\rightarrow \delta r(s) \Big|_{s=0,L}$ und $\delta \frac{dr}{ds} \Big|_{s=0,L}$ beliebig

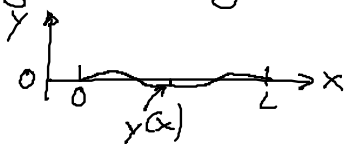
mit Oberflächentension in (7.5) & (7.9):

$$\begin{array}{l} \delta r \\ \delta \frac{dr}{ds} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} T l_p \frac{d^3 r}{ds^3} + \underbrace{\lambda(s)}_{\tau(s)} \frac{dr}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 r}{ds^2} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.12a) \\ (7.12b) \end{array}$$

... Filamentare sind frei von Kräfte (a) und Drehmomente (b)

d) Linearisierung um Grundzustand: $r_0(x) = x e_x$, $x = 0 \dots L$

• Menge-Darstellung



$$\begin{aligned} \underline{r}(x) &= x e_x + y(x) e_y \\ \text{gültig für } |y| &\ll L \end{aligned}$$

(i) Tangentenvektor:

$$\frac{dr}{dx} = e_x + \frac{dy}{dx} e_y \rightarrow \left| \frac{dr}{dx} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = 1 + O\left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$$

$$\rightarrow \hat{t} = e_x + O\left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$\rightarrow \lambda(x) \approx 0 + O\left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \rightarrow \tau = 0$$

(ii) Geschwindigkeit:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} y(x,t) e_y \perp e_x = \hat{t}$$

$$(iii) \frac{d^4 r}{dx^4} = \frac{d^4 y}{dx^4} e_y$$

$$(7.11) \xrightarrow[\text{Linearisierung}]{(i)-(iii)} \left[\frac{dy}{dt} = - \frac{1}{2} \frac{T l_p}{\rho} \frac{d^4 y}{dx^4} \right] \quad (7.13)$$

... Hyperdifferenzialgleichung
 • Lösung: Ansatz $y(x,t) = e^{-i\omega t} y(x)$ & $y(0) = y_0$

$$\rightarrow \boxed{iy(x) = \zeta^4 \frac{d^4 y}{dx^4}} \quad (7.14)$$

$$\text{mit } \boxed{\zeta = \left(\frac{k_B T \rho_p}{\rho \omega} \right)^{1/4}} \quad (7.15)$$

... Eindringtiefe

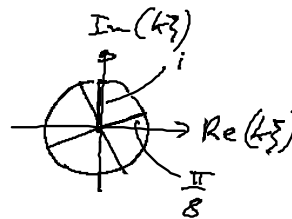
(i) Lösung für $L \rightarrow \infty$

Ansatz: $y(x) = e^{ikx}$ in (7.14)

$$\rightarrow i = (k\zeta)^4$$

$$\rightarrow k_{1,2} = \pm \frac{1}{\zeta} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{8}}_{c_1} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{8}}_{c_2} \right)$$

$$k_{3,4} = \pm \frac{1}{\zeta} \left(\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8} \right)$$



Lösung: $y(x \rightarrow \infty) = 0$ & $y''(0) = 0$ [s. (7.124)]

$$\rightarrow y(x,t) = \frac{y_0}{2} \left[\underbrace{e^{-c_2 x / \zeta}}_{\text{Dämpfung mit } \zeta} \underbrace{e^{i(c_1 x / \zeta - \omega t)}}_{\text{Welle}} + e^{-c_1 x / \zeta} \underbrace{e^{-i(c_2 x / \zeta + \omega t)}}_{\leftarrow} \right]$$

\rightarrow ... Eindringtiefe für Oszillationen eines Filamentes

(ii) anklides L:

Reskalierung: $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{t} = \omega t$

führe ein dimensionslose Größe

$$\boxed{S_p = \frac{L}{\zeta} = \left(\frac{\rho L \omega L^4}{k_B T \rho_p} \right)^{1/4} = \left(\frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Biegekraft}} \right)^{1/4}} \quad (7.17)$$

$$(7.13) \rightarrow \boxed{\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = -S_p^{-4} \frac{d^4 \bar{y}}{d\bar{x}^4}} \quad (7.18)$$

$\rightarrow S_p$ bestimmt Verhalten des Filaments!

- (1) $S_p \ll 1 \Leftrightarrow L \ll \xi \dots$ starrer Stab
- (2) $S_p \approx 1 \Leftrightarrow L \approx \xi \dots$ "hydrodynamische Reibung biegt
gestauchten Stab"
- (3) $S_p \gg 1 \Leftrightarrow L \gg \xi \dots$ "endlicher Stab"