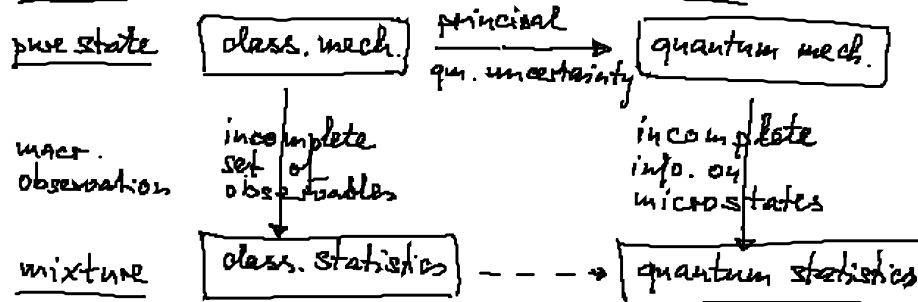


English Summary:

grandcanonical distribution

$$P(\xi) = \Xi^{-1} e^{-\beta(H - \mu N)} \quad \xi \in \Gamma = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{R}^{6N}$$

quantum-mechanical equilibrium distribution:



qm. mixture \leftrightarrow pure state $\langle \hat{M} \rangle = \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \text{tr}(\hat{P}_\psi \hat{M})$
 projector $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$

Basis der Mikrozustände $|\alpha\rangle \rightarrow$ sample set der Zufallsereignisse

P_α Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \underbrace{\langle \alpha | \hat{M} | \alpha \rangle}_{\text{qm. Erwartungswert im reinen Zustand } |\alpha\rangle} \quad \text{Erwartungswert}$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha} \langle \alpha | \hat{M} | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle$$

$$= \sum_{\beta} \underbrace{\langle \beta | \alpha \rangle P_{\alpha}}_{\hat{\rho}} \langle \alpha | \hat{M} | \beta \rangle$$

$$= \sum_{\beta} \langle \beta | \hat{\rho} \hat{M} | \beta \rangle$$

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})$$

mit dem statistischen Operator (Dichtematrix $\hat{\rho}_{\text{stat}}$)

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}$$

Überlagerung von Projektoren $\hat{\rho}_{\alpha}$ mit statist. Gewichten P_{α}

Bem.: reine Zustände \rightarrow kohärente Überlagerung von Wahrscheinlichkeitsamplituden
 $|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha \alpha'} \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{M} | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \psi \rangle$$

$e^{-i\varphi}$ \nwarrow $qm. Phasen$ \nearrow $e^{i\varphi'}$

\Rightarrow Interferenzen, falls \hat{M} nicht diagonal in $|\alpha\rangle$

Gemisch \rightarrow inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \langle \alpha | \hat{M} | \alpha \rangle \Rightarrow \text{keine } qm. \text{ Interferenz}$$

Normierung des statist. Op.

$$\text{tr} \hat{\rho} = \sum_{\beta \alpha} \langle \beta | \alpha \rangle P_{\alpha} \underbrace{\langle \alpha | \beta \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} = 1$$

Darstellung reiner Zustände $|\psi\rangle$: $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$

Projektor $\hat{\rho}_{\psi}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})$$

einheitliche Darstellung

NB: Math. Formulierung des Zustandbegriffs:
(klass. + qm.)

Zustand = normiertes, pos. lineares Funktional
auf der Algebra \mathcal{M} der Observablen

$$\varrho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{M} \mapsto \text{tr}[\hat{\varrho}\hat{M}] = \langle \hat{M} \rangle$$

reiner Zustand = Extrempkt. der konvexen Menge
der Zustände

Informationsmaße

Shannon-Information: $\mathcal{I}(\hat{\varrho}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \ln P_{\alpha} = \text{tr}(\hat{\varrho} \ln \hat{\varrho})$

$$= \sum_{\beta} \langle \beta | \hat{\varrho} \ln \hat{\varrho} | \beta \rangle$$

$$= \sum_{\beta, \alpha} P_{\alpha} \underbrace{\langle \beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \beta \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} \ln P_{\alpha}$$

NB: $\ln \hat{\varrho}$ ist definiert durch Spektralzerlegung

$$\ln \hat{\varrho} = \sum_{\alpha} \ln P_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

Informationsgewinn $K(\hat{\varrho}, \hat{\varrho}') = \text{tr}[\hat{\varrho}(\ln \hat{\varrho} - \ln \hat{\varrho}')] =$
(Eigenschaften wie klass.: $K \geq 0$)

Verallgemeinester kanon. statist. Op.

Vorurteilsfreie Schätzung unter Nebenbed.

$$\begin{aligned} \text{tr} \hat{\rho} &= 1 \\ \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M}^{\nu}) &= \langle M^{\nu} \rangle \quad \nu=1, \dots, m \end{aligned}$$

Voraussetzung: Die reinen Zustände $|\alpha\rangle$ haben gleiche a-priori Wahrscheinl., $|\alpha\rangle$ ist durch Maximalmessung gegeben.

$$\Rightarrow \hat{\rho} = \exp(\psi - \sum_{\nu} \lambda_{\nu} \hat{M}^{\nu}), \quad \psi = -\ln \text{tr}(\exp\{-\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \hat{M}^{\nu}\})$$

NB: Die \hat{M}^{ν} müssen nicht miteinander kommutieren, aber $[\hat{M}^{\nu}, H] = 0 \quad \nu=1, \dots, m$

damit sie Erhaltungsgrößen sind (thermodyn. Gleichgewicht)

Kanon. statist. Dp. $\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}}$ $Z := \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}})$

\hat{H} Hamiltonop.

großkanon. Dp. \Rightarrow Fermi-, Boseverteil. $\langle \hat{N} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{N})$