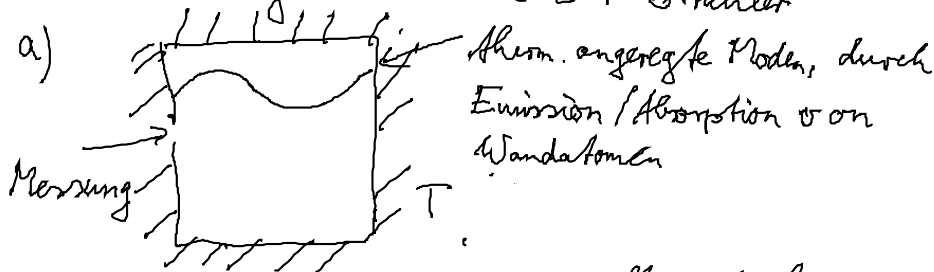


15.3 Hohlraumstrahlung

= Photongas - schwarzer Strahler



- i) stehende EM-Wellen, Wellenvektor $\underline{k}$, $\omega = c k$, transversale Polarisation
- ii) Zustandsdichte wie bei Debye-Modell $s=1,2$
- $\frac{2}{3} \times (5.10) \rightarrow \boxed{D(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2} \quad (15.23)$
- $\omega \rightarrow \infty$ möglich

b) Strahlungsenergie

Energie von n_i Photonen im Mode $i = (s, \underline{k}) : U(n_i) = \hbar \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right)$

wie Debye-Modell (15.17) : $U = \int_0^\infty \frac{\hbar \omega e^{-\hbar \omega / k_B T}}{1 - e^{-\hbar \omega / k_B T}} D(\omega) d\omega$

$= \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} d\omega$

Energie dichte : $\boxed{\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15 \hbar^3 c^3} (\hbar k_B T)^4 \sim T^4} \quad (15.26)$

Boltzmannsche Strahlungsgesetz

c) Spektrale Energie dichte

• Energie dichte pro Frequenzintervall

$\frac{U}{V} = \int_0^\infty u(\omega) d\omega \rightarrow \boxed{u(\omega) = \frac{\hbar^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1}} \quad (15.28)$

Plancksches Strahlungsgesetz

Grenzfälle

(1) $k_B T \gg \hbar \omega$: klassische Osz. mit Energie $2 \cdot \frac{1}{2} \hbar \omega$

$$u(\omega) = \frac{\hbar^3 T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (15.29)$$

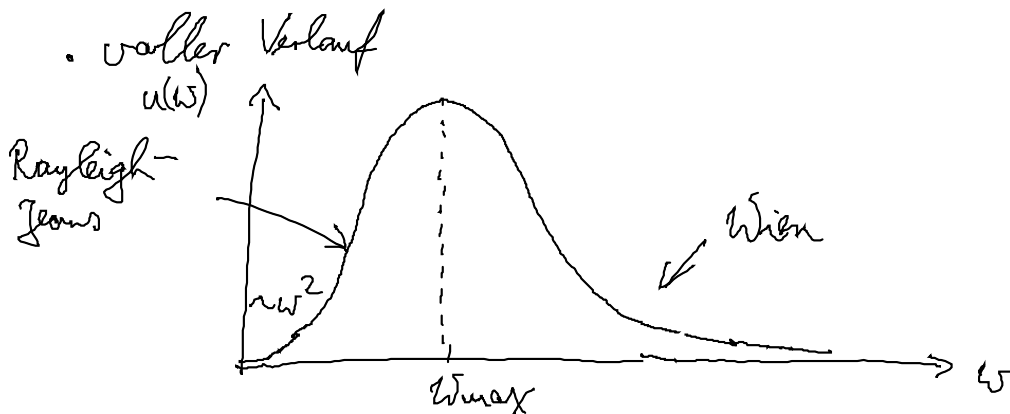
Rayleigh-Jeans-Gesetz

UV-Katastrophe für $\omega \rightarrow \infty$

(2) $\hbar \omega \gg k_B T$

$$u(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar \omega / k_B T} \quad (15.30)$$

Wien'sche Formel (empirisch erhalten)



Planck: Oszillatoren strahlen Licht in Energiepaketen aus $\rightarrow$ Geburtsstunde der Quantenphysik

d) Wien'sches Verschiebungsgesetz

• Maximum von $u(\omega)$

$$\frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B T} = f^{(-1)}(3) = 2.821, \quad f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1} \quad (15.31)$$

$$\omega_{\max} \sim T \quad (15.32)$$

- Umrechnung auf Wellenlänge: $\omega = \frac{c\pi c}{\lambda}$, $d\omega = -\frac{c\pi c}{\lambda^2} d\lambda$
 $u(\lambda) = u(\omega) \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5 e^{\hbar c / \lambda k_B T} - 1}$

$$\lambda_{\max} \cdot T = \frac{\hbar c}{f^{(1-1)}(3) k_B} = 0.2898 \text{ cmK}$$

- Diskussion (i) Sonne ($T = 6000 \text{ K}$) $\rightarrow \lambda_{\max} = 483 \text{ nm}$ (blau)
 breites Maximum: Abfall bei 400 nm auf 91%
 Abfall bei 650 nm auf 83%
- Chlorophyll hat 2 Absorptionsmaxima im SI
- irdische Atmosphäre bes. durchlässig im SI (400-800 nm)
- Auge am empfindlichsten im SI

16. Information und Entropie

- populärer Zugang zur Ensembletheorie
- Claude Shannon: Information - Entropie

16.1. Begriffe

a) Information

Grundfrage der Inf. Theorie:

Was ist der Wissensgehalt / Information $I(s)$ eines Ereignisses s , das mit der Wahrscheinlichkeit $P(s)$ auftritt.

Anwendung: Nachrichtübertragung, $\nearrow$ Datenspeicherung
 Maximierung der Information

Bsp.: $s =$ gedruckter Text, $P(s)$: Wahrscheinlichkeit für
Wörter, Silben, Buchstaben, ...

• quantitatives Maß für $I(s) = I(P(s))$

Postulate:

(i) $P(s)=1 \Leftrightarrow I(P(s)=1)=0$
 (ii) $I(P(s))$ monoton fallend in $P(s)$
 „unwahrscheinliche s tragen viel Information“
 (iii) unabh. s_1 und s_2 : $P(s_1 \wedge s_2) = P(s_1) \cdot P(s_2)$ (16.2)
 $\rightarrow I(s_1 \wedge s_2) = I(s_1) + I(s_2)$

$\rightarrow I(P(s)) = -C \ln(P(s))$ mit $C > 0$ (16.3)

Bem.: (i) C : Einheit von I
 (ii) $P(s) \rightarrow 0 \rightarrow I(s) \rightarrow \infty$
 (iii) $I(s) \in [0, \infty)$

b) Grad der Unbestimmtheit: für Ensemble von $\{s\}$

$\tilde{S} = \langle I(s) \rangle = \sum_s P(s) I(s) = -C \sum_s P(s) \ln P(s)$ (16.4)

... Grad der Unsicherheit, Informationsentropie,
Unschärfemaß, Unordnung, Nichtwissen, etc., ...

Bem.: $\tilde{S} = 0$ für $P(s) = 1$

c) Entropie der TD

mit $C = k_B$

Def.: $S = \max \tilde{S} = \max_s [-k_B \sum_s P(s) \ln P(s)]$ (16.5)

↑
Maximierung unter Nebenbedingungen!

16.2. Mikrokanonische Gesamtheit

• Nebenbedingung: $\sum_s P(s) = 1$

• Welches $P(s)$ maximiert $\tilde{S}$?

$$\rightarrow 0 = \delta \left[\tilde{S} - \underbrace{\lambda k_B \sum_s P(s)}_{\text{Lagrange-Parameter}} \right]$$

$$\rightarrow 0 = -k_B \sum_s \underbrace{\delta \left[P(s) / \ln P(s) \right]}_{\ln P(s) \delta P(s) + \delta P(s)} - \lambda k_B \sum_s \delta P(s)$$

$$\rightarrow 0 = -k_B \sum_s \delta P(s) (\ln P(s) + 1 + \lambda)$$

$$\rightarrow \delta P(s) \text{ beliebig} \rightarrow P(s) = e^{-(1+\lambda)/k_B} = \text{konst.}$$

$$\rightarrow \boxed{P(s) = \frac{1}{g}} \quad g: \text{Zahl der Zustände}$$

Postulat gleicher a-priori Wahrscheinlichkeiten

$$\rightarrow \boxed{S = k_B \ln g} \dots \text{Grundpostulat der stat. Mech.}$$

16.3. Kanonische Gesamtheit

• Makro - Nebenbedingung

$$\boxed{U = \langle U_s \rangle = \sum_s P(s) U_s} \quad 16.8,$$

• Maximiere $\tilde{S}$ unter 16.8. und $\sum_s P(s)=1$

$$\rightarrow 0 = \delta \left[\tilde{S} - \lambda k_B \sum_s P(s) - \beta k_B \sum_s P(s) U_s \right]$$

$$\rightarrow \ln(P(s)) + 1 + \lambda + \beta U_s = 0$$

$$\rightarrow P(s) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta U_s) \text{ mit } Z := e^{\lambda+1} = \sum_s e^{-\beta U_s} \quad (16.9)$$

aus stat. Mech.: $\beta = \frac{1}{k_B T}$ konstant?

(i) Entropie: $S = -k_B \sum_s \frac{1}{Z} e^{-\beta U_s} (-\ln Z - \beta U_s)$

$$= k_B \ln Z + k_B \beta U$$

(ii) Temperatur: $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = k_B \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} + U \right) \frac{\partial \beta}{\partial U} + \beta k_B$

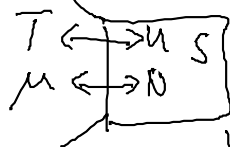
$$\underbrace{\left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} + U \right)}_{\sum_s (U_s - U) P(s) + U = 0} \frac{\partial \beta}{\partial U} + \beta k_B = 0$$

(iii) freie Energie: $F = U - TS = -k_B T \ln Z$

16.3. Die großkanonische Gesamtheit

S gekoppelt an T, μ

Macro-Nebenbedingungen:



$$U = \langle U_s \rangle = \sum_s P(s) U_s \quad 16.8.$$

neu: $N = \langle N_s \rangle = \sum_s P(s) N_s \quad 16.11.$

• Maximiere $\tilde{S}$ unter 16.8., 16.11. und $\sum_s P(s)=1$

$$\rightarrow P(s) = \frac{1}{Z_g} e^{-\beta U_s - \gamma N_s} \text{ mit } Z_g := e^{1+\lambda} = \sum_s e^{-\beta U_s - \gamma N_s}$$

(i) Entropie : $S = -k_B \sum_s P(s) \ln P(s) = k_B \ln Z_g + k_B \beta U + k_B \gamma N$

(ii) Temp : $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \dots = \beta k_B \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}}$

(iii) chem. Pot.: $-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N} = \dots = \gamma k_B \Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{\mu}{k_B T}} \quad (16.14)$

→ Wahrscheinlichkeit für Zustand s :

$$\boxed{\begin{aligned} P(s) &= \frac{1}{Z_g} \exp(-\beta U_s + \beta \mu N_s) & 16.15. \\ Z_g(T, V, \mu) &= \sum_s \exp(-\beta (U_s - \mu N_s)) & 16.16. \end{aligned}}$$

Z_g : großkanonische Zustandssumme

• großes Potential: $\Omega = U - TS - \mu N$

$$\boxed{\Omega = -PV = -k_B T \ln Z_g} \quad (16.17)$$

Euler-Relation

$$\boxed{\begin{aligned} Z_g &= e^{-\Omega/k_B T} = e^{-\beta \Omega} = e^{\beta PV} & 16.18 \\ P(s) &= e^{\beta (\Omega - U_s + \mu N_s)} \end{aligned}}$$

• alternative Herleitung in Kap. 14.1: Reservoirentropie