

20. Das ideale Bose-Gas

- Beschreibungszahl von Zuständen: $n_k^{(v)} > 1$ erlaubt!
 $\rightarrow$ bei $T \rightarrow 0$: Bose-Einstein-Kondensation: $n_1^{(v)} \approx v$, $n_k^{(v)} \approx 0$ sonst
 $\hat{=}$ „alle“ Bosonen im Grundzustand!
- $\rightarrow$ viele klassische Effekte
 Bsp: Supraleitung durch Cooper Paare ($\approx$ gepaarte e^-)
 Suprafluidität von ^4He
 erste Bose-Einstein-Kondensat: 1995 realisiert,
 $\rightarrow$ Nobelpreis 2001 für Cornell, Wieman (NIST)
 Ketterle (MIT)

20.1 Chemisches Potential

- mittlere Beschreibungszahl:

$$N_k^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} \quad (18.16)$$

Grundzustand: $\varepsilon_1 = 0$ (Festlegung)

- Es muß stets gelten: $\mu < 0$ (20.1)

denn (1) für $\mu > 0$, $N_k^{\text{BE}} = \infty$ für $\mu = \varepsilon_k$... unphysikalisch!

(2) vgl. Holteity: z_{BE} in Kap. 18.3 b): $\mu > 0 \rightarrow f_k > 1$

$\rightarrow$ Fugazität: $\xi = e^{\beta\mu} = e^{\mu/k_B T} \rightarrow z_{\text{BE}} = \infty$ mit $0 < \xi < 1$ (20.2)

- Besetzung Grundniveau: $\varepsilon_k = 0$

$$N_1 = \frac{1}{\xi^{-1} - 1} \rightarrow \infty \quad \text{für } \xi \rightarrow 1 \rightarrow \mu \rightarrow 0 \text{ \& } |\mu| \ll k_B T \quad (20.3)$$

... Bose-Einstein-Kondensation!

- chem. Pot. für $N_1 \gg 1$:

$$\text{aus } \xi^{-1} = e^{-\beta\mu} \approx 1 - \beta\mu \xrightarrow{(20.3)} N_1 = -\frac{k_B T}{\mu}$$

$$\rightarrow \mu(T) = -\frac{k_B T}{N_1} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \text{ (\& } |\mu| \ll k_B T \text{)} \quad (20.4)$$

20.2 Bose-Einstein-Kondensation

a) mittlere Besetzungszahl: $D(\varepsilon) = D_0 \sqrt{\varepsilon}$ (19.1)!

$$N_e = \int_0^\infty \frac{1}{\xi^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (20.5)$$

Taylor in ξ
(19.1) $\rightarrow$ $N_e = \frac{g_0 V}{\lambda_B^3} F_{3/2}(\xi)$ mit $F_{3/2}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n^{3/2}}$

Diskussion:

(i) $F_{3/2}(\xi)$ monoton $\rightarrow F_{3/2}(\xi=1) = 2.612 \dots$ Maximalwert

$$\rightarrow N_e^{\max} = 2.612 \frac{g_0 V}{\lambda_B^3} \sim V T^{3/2} \quad (20.6)$$

(ii) Problem: Vorgabe von $N > N_e^{\max}$, V, T !
Was sind die restlichen Teilchen

Antwort: im Grundzustand!

$$N = N_1 + N_e \quad (20.7)$$

denn N_2 nicht in N_e , weil $D(\varepsilon=0)=0$ & N_1 groß

b) charakt. Temperatur:

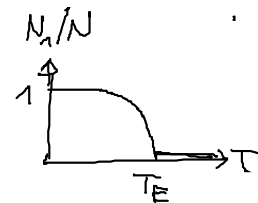
• Kondensation tritt ein für $N_e^{\max} = N$

$$(20.6) \rightarrow T_{BE} = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{1}{2.612} \frac{N}{g_0 V} \right)^{2/3} \quad (20.8)$$

• Besetzung des Grundzustandes:

$$T > T_{BE}: N_1 \approx 0$$

$$T < T_{BE}: N_1 = N - N_e^{\max} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_{BE}} \right)^{3/2} \right]$$



Bem: (1) $T = T_{BE}$... Kondensation setzt ein

$T \rightarrow 0$... vollständige Kond.: $N_1 = N$!

(2) $T_{BE} \sim \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \rightarrow$ hohe Dichte nötig! $\rightarrow$ Abkühlung

(3) ^4He : mit Dichte von flüssigen $^4\text{He} \rightarrow T_{\text{KE}} \approx 2\text{K}$

Suprafluidität: bei $T = 2,17\text{K}$

(4) 1935: direkte Beobachtung $\rightarrow$ Folie

21. Quantenstatistik mit Operatoren

• „Statistische Mechanik“ für QM-Zustände!

21.1 Dichtematrix

a) Vergleich:

• Idee: (i) Energie von Zuständen $U_s, H \rightarrow \hat{H}$... Hamiltonoperator
(ii) Ensemble von gem. Zuständen

$$\rightarrow S = k_B \ln g \quad (\text{Nebenbed.})$$

↖ g = all von Zustände

$$U = \langle \hat{A} \rangle \quad \dots \text{innere Energie}$$

$$N = \langle \hat{N} \rangle \quad \dots \text{mittlere Teilchenzahl}$$

• Vergleich: s. Folie

b) Definition: Dichtematrix = statist. Operator für stat. Ensemble

$$\hat{\rho} := \sum_s |s\rangle P(s) \langle s| \quad (21.1)$$

mit $\{|s\rangle\}$ ein VONS

• Mittelwert: $\langle \hat{A} \rangle = \sum_s P(s) \langle s | \hat{A} | s \rangle$ & $\langle s | t \rangle = \delta_{st}$

$$1 = \sum_t |t\rangle \langle t|$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_s \langle s | \hat{\rho} \hat{A} | s \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (21.2)$$

... Spurbildung (engl. trace)
für Operatoren

• Normierung: $\hat{A} = 1$

$$\text{tr} \hat{\rho} = \sum_s P(s) = 1 \quad (21.3)$$

$$P(s) = \langle s | \hat{\rho} | s \rangle \quad (21.4)$$

• Es gilt:

$$\boxed{\text{tr}(\hat{S}^2) = \sum_s P(s)^2 \leq 1} \quad (21.5)$$

$\uparrow$ o.B. $\uparrow$ jedes $P(s) \leq 1$

„Jeder positiv semi-definite Operator ($\langle s | \hat{S} | s \rangle \geq 0$) mit $\text{tr} \hat{S} = 1$ ist als Dichtematrix geeignet“

c) reine Zustände:

• $P(s) = \delta_{sm} \rightarrow \boxed{\hat{S} = |m\rangle\langle m| \xleftrightarrow{\text{o.B.}} \hat{S}^2 = \hat{S}} \quad (21.6)$

• Nernstsches Postulat: $T \rightarrow 0$, Grundzustand $|1\rangle$

$\rightarrow \boxed{\lim_{T \rightarrow 0} (\hat{S}^2 - \hat{S}) = \hat{O}} \quad (21.7)$

21.2 Satz von Liouville

• Zeitentwicklung von $\hat{S}$:

(i) Schrödinger-Gl.: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |s\rangle = \hat{H} |s\rangle$
 adjung.: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle s| = -\langle s| \hat{H} \quad (21.8)$

(ii) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = \sum_s \{ \hat{H} |s\rangle \underbrace{P(s)}_{\hat{S}} \langle s| - |s\rangle \underbrace{P(s)}_{\hat{S}} \langle s| \hat{H} \}$
 $\hat{S} = \sum_s P(s) |s\rangle \langle s|$

$\rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = [\hat{H}, \hat{S}]} \quad (21.9)$

... von-Neuman-Gleichung

Bem: (i) vgl. Liouville-Gl. (klassisch): $\frac{\partial}{\partial t} \rho = \{\mathcal{H}, \rho\}$

(ii) TD-GG: $\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = \hat{O} \iff [\hat{H}, \hat{S}] = 0!$

21.3 Thermodynam. Ensembles

a) mikrokanonisch: $g(U, V, N) \dots$ Zahl der Zustände $|s\rangle$ mit U, V, N

$$P(s) = \frac{1}{g} \rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{g} \sum_s |s\rangle \langle s| \quad (21.10)$$

$Z' \dots$ nur $|s\rangle$ mit U, V, N

b) kanonisch

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-\beta U_s} \stackrel{\hat{H}|s\rangle = U_s|s\rangle}{=} \frac{1}{Z} \langle s | e^{-\beta \hat{H}} | s \rangle$$

$$\stackrel{(21.4)}{\rightarrow} \hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad (21.11)$$

$$\cdot \text{Zustandssumme: } Z = \sum_s e^{-\beta U_s} = \sum_s \langle s | e^{-\beta \hat{H}} | s \rangle$$

$$\rightarrow \hat{Z} = \text{tr } e^{-\beta \hat{H}} \quad (21.12)$$

$$\rightarrow F = -k_B T \ln Z \text{ etc}$$

c) großkanonisch:

$$\cdot \text{analog: } \hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} e^{\beta(\mu \hat{N} - \hat{H})} \quad (21.13) \quad \text{mit } \hat{Z}_G = \text{tr } e^{\beta(\mu \hat{N} - \hat{H})} \quad (21.14)$$

mit $\hat{N} \dots$ Teilchenoperator

Bsp: harmon. Oszillator: $\hat{N} = \sum_i a_i^\dagger a_i \dots$ zählt die Schwingungsquanten!